

Основания для современного развития отечественного математического образования, заложенные его лидерами в XX веке

Алексей Семенов, Алма Абылкасымова,
Татьяна Рудченко

Статья поступила
в редакцию
в марте 2024 г.

Семенов Алексей Львович — академик РАН и РАО, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; главный эксперт департамента образовательных программ Института образования, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; главный научный сотрудник, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. E-mail: alsemenov2021@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1785-2387>

Абылкасымова Алма Есимбековна — академик Российской академии образования, академик Национальной академии наук Республики Казахстан, доктор педагогических наук, профессор, Директор Центра развития педагогического образования, заведующая кафедрой методики преподавания математики, физики и информатики Университета Абая (Алматы, Республика Казахстан). E-mail: aabylkassymova@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1845-7984>

Рудченко Татьяна Александровна — научный сотрудник Института кибернетики и образовательной информатики им. А.И. Берга, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН. Адрес: 119333 Москва, ул. Вавилова, 40. E-mail: rudchenko1@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4595-1072> (контактное лицо для переписки)

Аннотация

Анализируются взгляды на развитие математического образования Г.В. Дорофеева и других ведущих российских исследователей школьного математического образования XX в., в том числе В.В. Фирсова и А.Я. Хинчина. Важной составляющей этой системы взглядов были представление о гуманитаризации математического образования и связанное с ним понятие «воспитание математикой», в современной терминологии — представление о метапредметных и личностных результатах, достигаемых при освоении курса математики. Центральными областями гуманитаризации математического образования являются логика и язык, рациональное мышление, эффективная коммуникация. В рамках этих представлений обосновывается необходимость включения в курс математики задач, которые «неизвестно-как-решать» (школьнику, которому такая задача предложена), — задач неожиданных, нестандартных, творческих. В условиях происходящей цифровой трансформации образования роль таких задач возрастает, а роль рутинных, стандартных задач снижается — их можно быстро и безошибочно решать с помощью компьютера. Соответственно могут быть пере-

распределены ресурсы учащегося и учителя. Другая важная составляющая развития школьного математического образования — концепция дифференциации. Это понятие допускает разные интерпретации, но общим для них остается ведущая роль ученика. Понятие «уровневая дифференциация» введено В.В. Фирсовым в 1980-е годы. Центральным элементом этого понятия является достижение каждым учащимся всех намеченных целей, очевидно предполагающее, что цели должны быть персональными для каждого учащегося. Наиболее простым и полезным способом индивидуализации целей обучения является их адаптация под исходный уровень знаний ученика, его способности и мотивы. В условиях цифровой трансформации школы идеи Г.В. Дорофеева и его соратников могут быть в полном объеме реализованы в системах образования Российской Федерации и Республики Казахстан.

Ключевые слова школьное математическое образование, Г.В. Дорофеев, гуманитаризация образования, воспитание математикой, советская школа, неожиданные задачи, цифровая трансформация, уровневая дифференциация

Для цитирования Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е., Рудченко Т.А. (2024) Основания для современного развития отечественного математического образования, заложенные его лидерами в XX в. *Вопросы образования / Educational Studies Moscow*, № 4, сс. 214–239. <https://doi.org/10.17323/vo-2024-21419>

The Foundations for the Current Development of National Mathematical Education, Laid by its Leaders in the 20th Century Alexei Semenov, Alma Abylkassymova, Tatiana Rudchenko

Alexei L. Semenov — Academician of the Russian Academy of Sciences and of the Russian Academy of Education, Professor, Doctor of Sciences in Mathematics, Head of the Department of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University; Professor of the Department of Educational Programs, Institute of Education, HSE University; Chief Researcher, Herzen University. E-mail: alsemenov2021@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1785-2387>

Alma E. Abylkassymova — Academician of the Russian Academy of Education, Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Director of the Center for the Development of Pedagogical Education, Head of the Department of Methods of Teaching Mathematics, Physics and Informatics, Abay University (Almaty, Republic of Kazakhstan). E-mail: aabylkassymova@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1845-7984>

Tatiana A. Rudchenko — Researcher, Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences. Address: Vavilova St., 40, 119333 Moscow, Russian Federation. E-mail: rudchenko1@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4595-1072> (corresponding author)

Abstract The work analyzes the views on the development of mathematical education by G.V. Dorofeev and other leading Russian researchers of school mathematical education of the 20th century, including V.V. Firsov and A.Ya. Khinchin. Important for them were the idea of “humanitarianization of mathematical education” and the related

concept of “education in mathematics”, in modern terminology — about meta-subject and personal results achieved in a mathematics course. The central areas of humanitarization of mathematical education are logic and language, rational thinking, and effective communication. Within the framework of these ideas, the importance of including in a mathematics course problems that “don’t know how to solve” (for a student who is offered such a problem), unexpected, challenging, creative ones is considered. In the context of the ongoing digital transformation of education, the role of such tasks is increasing, and the role of routine, standard tasks is decreasing — they can be quickly and accurately solved using a computer. Respectively student and teacher resources can be reallocated. Another important concept discussed in this article is differentiation. There are different interpretations of this concept, common to which is the leading role of the student. The most important thing is “level differentiation”. This concept was introduced by V.V. Firsov in the 1980s. The central element of this concept is that each student achieves all intended goals. It obviously follows from this requirement that goals must be personal for each student. The simplest and most useful option seems to be one in which the goal is adapted to the student’s initial level, abilities and motives. In the context of the digital transformation of schools, the ideas of G.V. Dorofeev and his associates can be fully implemented in the education systems of the Russian Federation and the Republic of Kazakhstan.

Keywords school mathematics education, G.V. Dorofeev, humanitarization of education, education in mathematics, Soviet school, challenging problems, digital transformation of school, level differentiation in school

For citing Semenov A.L., Abylkassymova A.E., Rudchenko T.A. (2024) The Foundations for the Current Development of National Mathematical Education, Laid by Its Leaders in the 20th Century. *Voprosy obrazovaniya / Educational Studies Moscow*, no 4, pp. 214–239 (In Russian). <https://doi.org/10.17323/vo-2024-21419>

За последние сто лет мир радикально изменился. Изменения продолжают и ускоряются, и математика занимает не последнее место среди движущих сил этих изменений. При этом школьное математическое образование, как и подготовка учителей математики за те же сто лет — да и за триста лет тоже — изменились не принципиально, а популярность математики как школьного предмета, пережив взлет после реформы 1930-х годов, в свете последующих событий постепенно стала угасать и с тех пор постоянно снижается.

Между тем в России уже в XX в. была сформирована опережающая позитивная модель математического образования, отвечающая запросам меняющегося мира, был высказан целый ряд предложений по направлениям развития массового математического образования. Некоторые из этих предложений принадлежат ученым, посвятившим школьной математике большую часть своей творческой активности. В первой половине XX в. видное место среди них занимал А.Я. Хинчин. Наиболее крупными деятелями российского математического образования (если делать акцент именно на слове «образование») последних десятилетий XX в. были Г.В. Дорофеев и В.В. Фирсов, которые попытались в общем виде осмыслить и сформулировать задачи и пробле-

мы развития этого образования. Почти сверстники, выпускники мехмата МГУ, имевшие опыт исследования естественного языка математическими и компьютерными методами (более чем актуальная тема сегодня), они в разное время руководили главной в стране лабораторией по математическому образованию. До них в 1938–1940 гг. предшественником и аналогом этой лаборатории — кабинетом математики НИИ школ Наркомпроса — руководил А.Я. Хинчин.

В настоящей работе мы рассматриваем перспективы развития математического образования в XXI в., вытекающие из системы взглядов Георгия Владимировича Дорофеева, с привлечением созвучных ей положений математической педагогики других упомянутых исследователей.

К сожалению, список вышедших из печати работ Г.В. Дорофеева и В.В. Фирсова очень скуден. При подготовке статьи мы проанализировали все их публикации, а также широко привлекали неопубликованные материалы: отчеты о научно-исследовательских разработках, личные заметки, а также наши собственные воспоминания и записи — результаты общения с выдающимися учеными. Мы обращались также к Е.А. Седовой — ученице Г.В. Дорофеева, которая в течение ряда лет продолжала дело своего учителя в качестве руководителя его лаборатории в Российской академии образования, и к О.Б. Логиновой, которая фактически была правой рукой В.В. Фирсова в 1980–1990-е годы в созданной им организации «Образование для всех», а затем была проректором МИПКРО/МИОО и работала в издательстве «Промсвещение», занимая должности разного уровня.

Также с сожалением мы вынуждены зафиксировать, что анализ актуальности системы взглядов Г.В. Дорофеева и В.В. Фирсова в контексте цифровой трансформации жизни общества и потенциальной цифровой трансформации образования в предлагаемой работе предпринимается впервые. При этом мы убеждены, что сегодня в системах образования Российской Федерации и Республики Казахстан, как и в системах образования других стран, существенно возросла значимость и, еще важнее, востребованность практической реализации их идей. И одновременно именно сегодня воплощение в жизнь замыслов Г.В. Дорофеева в полном объеме стало по-настоящему реальным: с развитием цифровой среды появилась возможность повсеместно передавать вычислительную работу от человека цифровым устройствам, например калькулятору, имеющемуся в каждом мобильном телефоне. В этом смысле Георгий Владимирович Дорофеев и его единомышленники просто опередили свое время.

Данная статья в большой степени основана на рассмотрении системы взглядов упомянутых исследователей, представленной в их текстах. Для нас принципиально важно, что эти взгляды

явились результатом всего развития отечественной школы XX в. Предлагаемые изменения в математическом образовании вытекали в свое время из актуальных задач, уже тогда стоявших перед обществом, из предвидения будущего развития, и они точно не были «результатом западного влияния», или «заказом Всемирного банка», или проявлением чьего бы то ни было корыстолюбия.

То, что изменения не удалось реализовать за прошедшие десятилетия, не отменяет их необходимости. Наоборот, они только стали еще более насущными; при этом, благодаря цифровой трансформации всей жизни человека и используемых в этой трансформации технологий, неизмеримо выросли и возможности для их реализации. Разумеется, препятствия на пути изменений существуют и сегодня. Анализ актуальности и возможностей проведения этих изменений, а также препятствий к их осуществлению в рамках культурно-исторической методологии составляет основную проблематику предлагаемой публикации.

Статья написана по инициативе Е.А. Седовой. Елена Александровна предоставила нам информацию из личных архивов о работах Г.В. Дорофеева, В.В. Фирсова и их лаборатории в АПН — РАО.

1. Что такое гуманитаризация математического образования

1.1. Обучение математикой

Мы начнем с рассмотрения взглядов упомянутых виднейших деятелей отечественной (и не только) школьной математики.

В своем интервью [2002] Г.В. Дорофеев говорит:

Цель не в том, чтобы каждый ученик усвоил алгоритм решения той или иной типовой задачи. Главное — развитие средствами математики мышления, логики, языка. Выскажу еще одну, очевидно, более чем еретическую мысль: цель массового математического образования — научиться грамотно говорить, писать и понимать по-русски! Языковое обучение — вот самое важное в математике! Есть хорошая формулировка: не обучение математике, а обучение математикой...

Иными словами, обучение математике ориентировано не столько на собственно математическое образование в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики [Дорофеев, 2006].

В.В. Фирсов писал:

Важнейшим проявлением специфики общего математического образования является оригинальное целеполагание, в ко-

тором формальные цели образования (воспитание и развитие ребенка) выступают наравне с реальными (усвоение математического содержания, умений применять математику к решению прикладных задач). Образно говоря, математику в школе изучают не только и, возможно, не столько ради усвоения собственно математики. Культурное значение школьного математического образования оказывается сопоставимым с культурным значением самой математической науки [Фирсов, 2012с].

Анализируя тексты Г.В. Дорофеева, В.В. Фирсова и А.Я. Хинчина с позиций герменевтической методологии, принимая во внимание все коннотации используемых ими терминов, мы сталкиваемся как бы со смешением понятий. Кажется, что авторы не разделяют образование, обучение, воспитание; соединяют в некотором аспекте математику и математическое образование. Сегодня к этому добавились бы еще метапредметные и личностные результаты последних версий ФГОС. Такое парадоксальное «смешение» имеет для нас глубокий смысл. Оно приводит учителя к видению в каждом математическом действии элемента воспитания, личностного роста, выхода за собственно математическое содержание к гуманитарному — как это представлял себе Г.В. Дорофеев. Одновременно выстраивается максимальное количество параллелей между деятельностью ученика и деятельностью профессионального математика: и для того и для другого открытие нового, неожиданного, неизведанного обладает наибольшей ценностью.

Авторы цитируемых нами высказываний, убежденные в своей правоте, при этом понимали инновационность своих взглядов и трудности в их реализации. Отсюда и «извиняющиеся» обороты речи: «более чем еретическая мысль», «образно говоря».

В фундаментальном программном произведении Г.В. Дорофеева [2005], описывающем стандарты школьного образования, вопрос о воспитании математикой рассматривается более детально:

Социально-личностная компетентность выпускника старшей школы предполагает, что он:

- владеет стилем мышления, характерным для математики, его абстрактностью, доказательностью, строгостью;
- умеет проводить аргументированные рассуждения, делать логически обоснованные выводы, отличать доказанные утверждения от недоказанных, аргументированные суждения от эмоционально убедительных;
- умеет проводить обобщения и открывать закономерности на основе анализа частных примеров, эксперимента, выдвигать гипотезы и понимать необходимость их проверки;

- умеет ясно и точно выражать свои мысли в устной и письменной речи, логически грамотно воспринимать устную и письменную речь, отличать в информационном потоке факты от их интерпретации;
- умеет соотносить свою точку зрения с мнением авторитетных источников и большинства, аргументированно сопротивляться давлению сверху и групповому давлению;
- умеет находить информацию в разнообразных источниках, обобщать и систематизировать ее и интегрировать в личный опыт новую, в том числе самостоятельно полученную информацию;
- умеет принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации, обоснованно решать вопрос об участии в лотереях, азартных играх и финансовых пирамидах, понимает вероятностную сущность страховой и банковской деятельности.

Как показывают и эти цитаты, и вся деятельность Георгия Владимировича, его подход, в том числе и к стандартам школьного образования, был принципиально компетентностным, причем приоритет он отдавал, говоря современным языком, метапредметным и личностным компетентностям. Именно такой подход, во многом благодаря А.Г. Асмолову, был принят во ФГОС 2009–2012 гг. и сохранился в нормативно-методических документах третьего десятилетия XXI в.

Г.В. Дорофеев [2006] подчеркивал:

Именно поэтому в качестве основополагающего принципа новой концепции школьного математического образования в аспекте «математики для каждого» на первый план выдвигается принцип приоритета развивающей функции в обучении математике. Иными словами, обучение математике ориентировано не столько на собственно математическое образование в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики.

В соответствии с этим принципом главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки как таковой, а общеинтеллектуальное развитие — формирование у учащихся в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе, для динамичной адаптации человека к этому обществу.

Формирование условий для индивидуальной деятельности человека, основывающейся на приобретенных конкретных ма-

тематических знаниях, для познания и осознания им окружающего мира средствами математики остается, естественно, столь же существенной компонентой школьного математического образования.

С точки зрения приоритета развивающей функции конкретные математические знания в «математике для каждого» рассматриваются не столько как цель обучения, сколько как база, «полигон» для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности учащихся. Для формирования личности учащегося, для достижения высокого уровня его развития именно эта деятельность, если говорить о массовой школе, как правило, оказывается более значимой, чем те конкретные математические знания, которые послужили ее базой. <...>

Базовый этап обучения математике в общеобразовательном курсе, в курсе «математики для каждого», имеет целью общеинтеллектуальное и общекультурное развитие учащихся, в том числе повышение уровня абстрактного и логического мышления, формирование у учащихся культурологических представлений, связанных с математикой, включающих, в частности, представления о математике и ее месте в человеческой цивилизации, усвоение основ математического языка и математического аппарата как средства постановки и решения проблем реальной действительности. Необходимой целью базового обучения математике является также создание реальной возможности для продолжения обучения в любом профиле на старшей ступени школы.

Без сомнения, образование с помощью математики можно считать прародителем метапредметных и личностных результатов ФГОС.

Г.В. Дорофеев и В.В. Фирсов считали указанные цели действительно центральными в математическом образовании XX в. Использованное здесь ими понятие «обучение математикой», как и «воспитание математикой», и французская сентенция *Pas l'éducation mathématique mais l'éducation par les mathématiques*¹ — это не их изобретение. Буквально так же называется, в частности, статья А.Я. Хинчина [1961a], увидевшая свет в начале 1960-х годов, — «О воспитательном эффекте уроков математики». По мнению его ученика Б.В. Гнеденко [1961], она была написана гораздо раньше, еще в 1947 г., однако не была опубликована при жизни автора. При этом статья представляет собой законченный и тщательно выверенный текст принципиального содержания. Наша гипотеза со-

¹ «Не обучение математике, а обучение математикой» (фр.).

стоит в том, что гуманистические взгляды А.Я. Хинчина находились в очевидном для него противоречии с технократическими, «индустриальными» установками, относящимися к образованию. Разгром педологии, с которого эта «индустриализация» образования, по существу, началась, служил серьезным напоминанием.

Г.В. Дорофеев и В.В. Фирсов не предлагали ничего сверхинновационного. По-прежнему современно звучат сегодня слова члена-корреспондента Петербургской академии наук Василия Петровича Ермакова из его учебника математического анализа издания 1907 г., которые цитирует Л.Д. Кудрявцев [1985]:

Говорят, что для изучения математики нужны особенные способности; это мнение ошибочно; для математики нужно логически правильное мышление. При правильном воспитании эта способность может быть развита у каждого ребенка. Цель школьного обучения должна заключаться в развитии логически правильного мышления.

Л.Д. Кудрявцев следом за В.П. Ермаковым считает приоритетными именно метапредметные результаты при обучении математике. При этом В.П. Ермаков писал свой учебник почти 120 лет назад, а Л.Д. Кудрявцев рассуждал о преподавании математики почти 40 лет назад, и ни о какой цифровой революции тогда еще не было и речи! (См. также обсуждение в [Семенов, Абылкасымова, 2024].)

1.2. Логика и язык — это умение создавать и понимать текст на родном языке

Г.В. Дорофеев [2006] писал:

В процессе изучения математики в наиболее чистом виде может быть сформировано логическое и алгоритмическое мышление, многие качества мышления — такие, как сила и гибкость, конструктивность и критичность и т.д.

Эти качества мышления сами по себе не связаны с каким-либо математическим содержанием и вообще с математикой, но обучение математике вносит в их формирование важную и специфическую компоненту, которая в настоящее время не может быть эффективно реализована даже всей совокупностью отдельных школьных предметов.

А.Я. Хинчин [1961a] раскрывает специфику математической аргументации:

В обыденной жизни, даже в «любительских» (не строго научных) принципиальных спорах, мы, защищая какое-либо утверждение, довольствуемся обычно одним-двумя аргументами, говорящими в его пользу. Противник может привести в ответ не-

сколько аргументов, говорящих против нашего утверждения. Однако обычно ни та, ни другая аргументация не бывает исчерпывающей; противники продолжают изыскивать новые аргументы <...> и спор продолжается. <...>

Иначе обстоит дело в математике <...> В математике нет и не может быть «наполовину доказанных» и «почти доказанных» утверждений... <...>

Изучая математику, школьник впервые в своей жизни встречает столь высокую требовательность к полноценности аргументации.

Дальше А.Я. Хинчин пишет о таких важных возможностях воспитания математикой, как *борьба «против незаконных обобщений», «против необоснованных аналогий», «за полноту дизъюнкций», «за полноту и выдержанность классификации»* — эти общие принципы он считает ключевыми в формировании мышления и полноценности аргументации.

Для Г.В. Дорофеева отношения математики с языком не сводятся только к формальному построению логически корректных и аргументированных текстов. Математический аппарат и стройная структурированность математического языка, по мнению Дорофеева [2006], могут быть хорошим подспорьем в освоении иностранных языков и грамматики родного:

Логика рассуждений — и в математике, и в повседневной жизни — теснейшим образом связана с языком, с его коммуникативным аспектом. Многие недостатки в математической подготовке учащихся определяются их недостаточной языковой культурой и даже грамотностью, неумением адекватно понять или выразить содержащуюся в том или ином предложении информацию. Это касается и естественного языка, и математического языка, в котором практически полная однозначность символического языка сочетается с явлениями неоднозначности, в частности метафоричности, свойственными языку естественному. <...>

В то же время связи между естественным и математическим языком настолько глубоки, что «улица межпредметных связей» между обучением математике и языкам — как родному, так и иностранным — имеет высокие потенциальные возможности оказаться с интенсивным двусторонним движением.

Детализацию этих положений можно найти в [Дорофеев, 2006].

Принимая ключевую роль математики в развитии мышления и языка, мы этим не ограничиваемся. Математика помогает ученику ориентироваться в окружающей действительности, предоставляет ему математические модели этой действительности, использующие специфический язык — термины, обозначения, символы, графики, графы, алгоритмы и т.д. Значит, ученика нужно обучить математическому языку, чтобы он мог работать с математическими моделями. Основное назначение математического языка — способствовать организации деятельности обучающегося, что является одним из главных условий для формирования современно мыслящего человека. В образовательном контексте мы при этом сосредоточиваемся на учебной деятельности. Сегодня математический язык и математическая модель составляют стержень изучения курса школьной математики. При наличии такого идейного стержня математика предстает перед учащимися не как набор разрозненных фактов, которые учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная развивающаяся и в то же время развивающая дисциплина, имеющая общекультурный характер.

Поэтому, на наш взгляд, заниматься развитием вербально-логического компонента математического образования необходимо как можно раньше, лучше всего уже в начальной школе, но обязательно при изучении математики в 5–6-х классах, и непременно сообразно возрасту и актуальному логическому развитию учащихся, не стремясь ответить на еще не заданные ребенком вопросы.

Подводя итоги, можно сказать, что центральными понятиями гуманитаризации математического образования являются:

- логика и язык;
- рациональное мышление;
- эффективная коммуникация.

**1.3. Раз-
нообразие
и неожидан-
ность задач как
условие гумани-
таризации**

Значимость сформулированных Г.В. Дорофеевым и А.Я. Хинчиным образовательных целей неизмеримо возросла в XXI в. Более того, гораздо более важной стала цель, которую Георгий Владимирович и его коллеги предполагали, но не формулировали явно. При этом она тесно связана с гуманитаризацией.

Название для этой цели предлагают А.Г. Асмолов и его коллеги: преадаптивность. Если коротко, преадаптивность по Асмолову — это способность и готовность к творческому решению неожиданных задач. Он, как и ряд других авторов, считает преадаптивность ключевым качеством человеческой личности в XXI в., для которого характерна высокая скорость изменений, создающая человеку «шок будущего» — жизнь в условиях постоянного возникновения новых ситуаций и новых вызовов.

...адаптации выступают как приспособления, основанные на уже приобретенном опыте, а преадаптации нацелены на новизну и непредсказуемость будущего. <...>

Постоянное присутствие неопределенности как сущностного свойства мира служит источником веера задач, перед которыми объективно поставлена любая живая система. Конструктивная функция задач на неопределенность состоит прежде всего в том, что их решение является условием развития системы, поскольку предполагает как ее изменение при ошибочных «сбоях» уже утвердившихся на основе прошлого опыта адаптивных специализаций, так и реорганизацию при участии преадаптаций, нацеленных на непредсказуемое будущее. <...>

...в отличие от необходимого разнообразия при адаптации, преадаптивным ответом живой системы на неопределенность будущих вызовов является избыток разнообразия как условия конструирования «вне-возможного». <...>

Преадаптация к неопределенности выступает как школа эволюции, в которой выпускники, решая не алгоритмизируемые задачи, готовятся к встрече со случайностями странного мира, наращивают зоркость преадаптации как «функционального органа шестого чувства» [Асмолов, Шехтер, Черноризов, 2018].

Противоречивый VUCA-мир <...> становится <...> стимулом для преодоления системного кризиса образования с помощью перехода от парадигмы обучения знаниям, умениям, навыкам — к школе неопределенности и парадигме вариативного мотивирующего развивающего образования [Асмолов, 2016].

Хаос как неуправляемая стихия перестает восприниматься как источник одних страхов. <...> Развитие и рост внутренней сложности помогает нам избавиться от иллюзий предвидимости и управляемости и быть готовыми к различным неожиданностям и к различным возможностям. А это и есть наиболее продуктивная стратегия в сложном, часто хаотическом мире в условиях хаоса [Леонтьев, 2018].

Каким образом преадаптивность связана с гуманитаризацией? И при чем тут математика?

Конечно, неожиданные задачи могут эпизодически возникать в разных школьных предметах. Однако построение школьного курса вокруг задач, понимаемых широко — например, теорема геометрии как задача, — характерно прежде всего для математики.

Решение неожиданных задач, т.е. задач, которые «неизвестно-как-решать» [Семенов, 2023], предполагает:

- понимание языка;
- логический анализ;
- моделирование;
- использование общих стратегий интеллектуальной деятельности (см., например, работы Э. де Боно [2015], Г.С. Альтшуллера [1979], Д. Пойа [1976]);
- планирование своих действий вообще.

Поясним, в частности, связь задач, которые «неизвестно-как-решать», с целью развития логики и языка. Как правило, такие задачи предполагают и отсутствие логического шаблона, и нетривиальность изложения хода решения. Таким образом, их включение в работу учащихся служит и другим целям гуманизации.

Задачи, которые «неизвестно-как-решать», «олимпиадные» задачи человечество изобретало как занимательные, нешкольные. Картина Н.П. Богданова-Бельского «Устный счет.

В народной школе С.А. Рачинского», написанная в 1895 г., посвящена решению именно такой задачи на уроке в сельской школе, и эта картина стала символом российского математического образования.



1.4. Историческая преемственность гуманитаризации в развитии человека разумного и отдельного индивида

Очевидным аргументом в пользу обсуждаемого подхода является то, что он базируется на преемственности: от рождения ребенка — до жизни профессионала, от доисторических времен, когда человек изобретал способ извлечения огня, охоту, колесо, рисунок, речь, — до потребностей XXI в.

- Когда ребенок рождается и в первые годы жизни ему постоянно приходится решать задачи, которые «неизвестно-как-решать». Сегодняшний человек живет в мире, наполненном такими задачами.
- Развитие логики и коммуникации во взаимодействии с материальными объектами окружающего мира и другими людьми является принципиальным элементом развития ребенка.

Математическая деятельность в детском саду и школе должна служить естественным продолжением этих двух линий.

Универсальная дидактическая (и математическая) идея состоит в следующем: в индивидуальном развитии проходить стадии развития и открытия человечества — сталкиваясь с трудностями, делать открытие и потом использовать его, индивидуально «пожиная плоды» своих изобретений.

Масштабнейшим актом разрушения преемственности в человеческом развитии, его дегуманизации стало массовое школьное образование, в котором в течение многих столетий человека почти исключительно заставляют выучивать наизусть тексты, математические и грамматические правила и алгоритмы. Критерием результата при этом считается близость ответа к канону; нахождение и исправление своей ошибки ценится меньше, чем механическая безошибочность [Abylkassymova et al., 2024].

2. Дифференциация и «большие идеи»

Проектируя будущее математического образования, Г.В. Дорофеев и В.В. Фирсов, естественно, обращались к проблеме дифференциации обучения и выделяли два ее измерения:

- уровневая дифференциация;
- профильная дифференциация (профилизация).

По понятным причинам особое внимание уделялось базовому уровню. Достижение этого уровня — уровня «тройки» — предполагалось фиксировать в образовательном стандарте. Однако сама по себе идея уровневой дифференциации, конечно, допускает и возможность фиксации, например, уровня «четверки». Своя шкала уровней может возникнуть и внутри каждого профиля, так образуется «двумерная» картина, вполне реализуемая в цифровом образовательном мире.

Традиционно считается, что нижние уровни являются менее творческими. «В самом низу» предполагается заучивание правил и алгоритмов, потом идет умение их применять во все более сложных и разнообразных ситуациях, обобщать и модифицировать правила и наконец — изобретать что-то новое. Нам представляется, что сегодняшний мир требует иного распределения по уровням, и сегодняшнее образование должно быть устроено иначе. Именно это новое устройство образования мы имели в виду, говоря о задачах, которые «неизвестно-как-решать». Решение таких задач должно быть элементом образования — учения и воспитания каждого, идущим параллельно с освоением готовых алгоритмов и правил, зачастую опережая такое освоение, делая его более понятным и полезным [Семенов, 2023].

И в том и в другом виде дифференциации, естественно, предполагалось наличие инварианта, общего для всех уровней и профилей. В.В. Фирсов [2012b] пишет:

«Большие идеи» науки и культуры образуют своеобразный каркас содержания образования. Они же непосредственно «выходят» на общие мировоззренческие категории и проявляют их.

Представляется, что большие идеи и должны быть инвариантом различных воплощений курса математики. В рамках школьного курса для большинства больших идей невозможно «полное и окончательное» их усвоение, как это возможно для формулы площади треугольника или корней квадратного уравнения. Большая идея формируется — а желательно сначала открывается — в каких-то своих проявлениях, обсуждается учащимися и учителем, потом выявляется во все большем числе ситуаций, в самой математике, в ее приложениях, а иногда и вне математики. Большая идея, как правило, остается с выпускником школы в его дальнейшем образовании, работе и жизни. Это — «то, что остается, когда забываешь все, чему тебя учили».

Обсуждение состава больших идей выходит за рамки настоящей работы, но приведем все же несколько примеров. К большим идеям мы относим, в частности, соответствие между именем и значением (то, с чего начинается алгебра); числовое измерение объектов и процессов (численное моделирование); уравнение, его решение и общую формулу решения; изменение, скорость изменения (производная), суммирование изменений (интеграл); изменение с постоянной скоростью, с постоянно возрастающей скоростью, со скоростью, возрастающей как сама величина (геометрическая прогрессия, экспонента); математическую модель пространственных объектов и их расположения (геометрия), графическое моделирование математических объектов — чертеж на экране или бумаге (визуализация).

Развитие цивилизации в целом и российского общества в XXI в. ведет к уточнению системы образовательных профилей и роли математики в каждом из них. Сегодня в каждом профиле должна реализовываться цель освоения на своем уровне больших идей математики и неожиданных задач, но математическое содержание может быть разным, оптимизированным для профиля. В математике каждого профиля должно быть место для компьютера, используемого для моделирования задач профиля. В ближайшие годы будет оставаться важным IT-профиль, предполагающий высокую степень интеграции математики и информатики, создание учащимися собственных алгоритмов и программ. Важным представляется профиль, где упор делается на доказатель-

ство учащимся теорем как решение исследовательских задач, этот профиль будет питать отечественную математику и давать преподавателей высшей и средней школы.

В действующем варианте ФГОС и соответствующих программах профильное обучение уже выделено для старших классов основной школы и для полной средней школы. Однако такое выделение лишь частично реализует идеи Дорофеева и Фирсова. В частности, в соответствии с этими программными документами обучение в целом классе идет или по базовой программе, или по профильной. Такая организация профильного обучения вызывает обоснованное возражение со стороны некоторых учителей: если для неоднородного класса выбрать профильный уровень, то возникнут «двоечники», если базовый — мы потеряем способных детей, потому что у них пропадет мотивация, они не будут готовы к профильному ЕГЭ. В системе же уровневой дифференциации в одном классе удавалось совмещать образовательные траектории детей с разными целями — и базовыми, и профильными. И при этом эти цели достигались.

3. Положение дел в российской массовой школе XX в.
Трудности на пути изменений
3.1. Эволюция советской и российской системы образования

Становится ли решение задач обычного школьного курса гуманитарной деятельностью для ученика? Являются ли эти задачи неожиданными для него? К сожалению, ответ на эти вопросы отрицательный. О необходимости изменения в направлении гуманитаризации как раз и говорят Г.В. Дорофеев и В.В. Фирсов.

В какой степени мы сегодня достигаем цели воспитания математикой, развития языка и логики при освоении курса, скажем, алгебры в основной школе? Практически ни в какой. В процессе решения уравнений языка нет вообще, а логика следует одному из двух шаблонов — эквивалентные преобразования и «не забудь про ОДЗ». От ученика не требуется рассуждать логически, а требуется следовать шаблону, кем-то логически построенному до него.

Что касается текстовых задач, то вот что писал на эту тему А.Я. Хинчин в работе, написанной, по мнению Б.В. Гнеденко [1961], в 1938–1939 гг., но опубликованной только в 1961 г.:

Как-то мне пришлось спросить несколько опытных учителей пятых классов о том, какой примерно процент учащихся действительно научается решать арифметические задачи, не являющиеся простыми вычислительными примерами, т.е. такие, где способ решения, как бы прост он ни был, должен быть найден самим учащимся. Из всех опрошенных мною учителей только один утверждал, что этому искусству удастся научить до 15% учащихся; все другие говорили, что лишь отдельные учащиеся овладевают этим искусством, а некоторые даже заявля-

ли, что «этому вообще научить невозможно». Конечно, решив целый ряд совершенно однотипных задач, ученик без труда решит задачу в точности того же типа (этим объясняется отсутствие сплошных провалов на экзаменах и контрольных работах); но добиться, чтобы ученик самостоятельно нашел решение задачи нового, хотя бы и очень простого типа, — это, по единодушному мнению учителей, есть дело, удающееся только в самых исключительных случаях.

Описывая всю эту тяжелую ситуацию, я думаю, что не очень сгустил краски. Если в отдельных случаях дети все же научаются решать задачи, интуитивно отличают правильное рассуждение от ложного, находят в этих упражнениях ума здоровое удовольствие и в конечном счете действительно развивают свою сообразительность, то такие исключения способны только подтвердить печальное общее правило [Хинчин, 1961b].

Если обратиться к геометрии, то в ее доказательствах логика используется более свободно. Рассуждения с опорой на наглядность могут быть нетривиальными и интересными для ученика. Беда состоит в том, что большой объем курса геометрии («Все теоремы здесь важны») не оставляет времени для сколько-нибудь нетривиальных самостоятельных доказательств; для получения отличной оценки необходимо и почти достаточно выучить определения, формулировки и доказательства теорем из учебника.

Часто можно слышать утверждение, что математические дисциплины в школьном образовании развивают логику. Однако оно верно лишь в очень малой степени. В существующих математических курсах логика не развивается. Логика решения конкретных задач изначально была у автора курса. Автор передал ее учителю, который смог в ней разобраться или просто запомнить. Учитель дает детям конкретные задачи и тренирует их на решение именно этих задач. Логика уже «встроена» в то, что говорит учитель. Ребенок не видит, не открывает, не находит ее сам. Он следует этой логике как части заданного алгоритма. Он действует так не потому, что это логично, а потому, что так сказал учитель. Довольно быстро ученик и вовсе забывает о существовании логики и для решения новой для него задачи просто ищет готовый алгоритм в учебнике или в подсказке учителя. Следование правилу убивает логику создания правила. Возможность выявить логику могла бы быть в ситуации ошибки, но, как правило, реакция учителя на ошибку ученика выглядит не как «это нелогично», а как «это не соответствует заданному образцу».

О «воспитании навыков закономерного и безошибочного мышления», «приучении к строгому в логическом отношении ходу мыслей», которые объявляются «первой и основной задачей учителя математики», А.Я. Хинчин пишет:

Однако как раз потому, что эта воспитательная функция уроков математики приобрела характер банальности, именно в этом направлении мы слышим много высказываний, приводимых по готовому трафарету, без достаточного обдумывания [Хинчин, 1961a].

Напомним: это написано А.Я. Хинчиным в довоенные годы, но опубликовано в 1961 г., и его замечание не утратило к тому времени актуальности. Ситуация в массовой школе с тех пор мало изменилась. Приведем анализ В.В. Фирсова, относящийся к 2002 г.:

Примером эффективной образовательной реформы может служить реформа 1930-х годов, вызванная потребностями индустриализации страны. Эта реформа выдвинула ясные и четко выраженные образовательные цели: освоение массовых рабочих профессий — для выпускников неполной средней школы, подготовка к получению высшего (технического) образования — для выпускников полной средней школы, освоение инженерных профессий — для большей части выпускников вузов. Государство знало, каким должен быть результат системы образования (легко заменимый «винтик» большой государственной машины, обладающий заданными социальными и профессиональными качествами), и выстраивало систему под четкий социальный заказ. В итоге пореформенные поколения выпускников советской системы образования выиграли войну, обеспечили восстановление страны, добились выдающихся научно-технических достижений 1950–1960-х годов.

К концу 1950-х годов стала ощущаться необходимость реформирования системы образования. <...> ...модель образования, созданная для условий индустриального общества и тоталитарного государства, плохо отвечает современным российским условиям и общественным запросам. <...>

С педагогической точки зрения современный кризис образования носит системный характер. Он затрагивает как систему в целом, так и ее элементы в отдельности.

Образуется целенаправленная цепочка, задающая высшее образование в качестве главной цели образовательного процесса, — вузоцентризм системы образования, идущий от реформы 1930-х годов. <...>

Вузоцентризм существенно деформирует общее образование, порождая селекцию учащихся, дифференциацию школ по качеству образовательных услуг, расслоение общего образования на массовое и элитное [Фирсов, 2012a].

Формально система образования сегодня не отвергает цели гуманитаризации школьного математического образования и воспитания математикой. Они провозглашаются в различных документах, в том числе в стандартах и программах. Если обсуждать их с «массовым» учителем, то он (она), скорее всего, с этими целями согласится. Но в реальном образовательном процессе происходит то, что было описано выше. Вот что писал в 1990 г. профессор А.В. Гладкий, известный математик, в основном придерживавшийся в вопросах школы консервативных взглядов:

...выпускники школы совершенно не умеют говорить и тем более писать на математические темы, не умеют выражать свои мысли словами. В школе их этому не учили; «развитие математической речи», которым там занимаются, сводится, как правило, к затверживанию штампов, сильно отдающих канцеляритом и даже не всегда грамотных. Своими словами они не умеют выразить ни одно математическое утверждение, даже такое, смысл которого им вполне ясен, и тем более цепочку умозаключений, хотя бы совсем простую. А в более сложных случаях это существенно затрудняет понимание, потому что понять по-настоящему математическое рассуждение — значит быть в состоянии его воспроизвести, и притом воспроизвести не форму рассуждения, а его содержание, т.е. пересказать своими словами [Гладкий, 1990].

Сегодня для большинства учащихся имеется явное и растущее противоречие между целью «отработки навыков, техники» алгебраических преобразований для достижения высокого уровня скорости и безошибочности решения задач и целью «воспитания творческой личности», «достижения метапредметных результатов». В современном массовом школьном образовании нет места для самостоятельного открытия учеником числа и счета, позиционной системы счисления. Время, энергия, мотивационный ресурс ученика растрачиваются на тренировку арифметических действий в десятичной системе. То же можно сказать и о большей части профессионального образования. Даже в исследовательских университетах собственно исследованию отводится весьма скромная роль. Экзаменационные процедуры ориентированы в своей массе именно на воспроизведение выученного.

3.2. Эволюция системы образования не способствует достижению современных целей

В чем же дело? Принципиальная причина в том, что декларируемые де-юре замечательные цели просто «не умещаются» рядом с другими, де-факто основными. Эти, другие, цели диктуются:

- 1) «прагматической» задачей формирования математических компетенций XIX в. и первой половины XX в. как способности

быстро и безошибочно выполнять известный алгоритм. Эта задача была продиктована приоритетами индустриального общества, а в нашей стране ее значимость усиливалась императивом индустриализации и соответствовала идеям «коллективизации» и «культурной революции»;

2) важнейшей частью аттестации — ЕГЭ в России и ЕНТ (Единое национальное тестирование) в Казахстане. Задания этих тестов не становятся неожиданными задачами для учащегося, их решение не предполагает разворачивания гуманитарной деятельности. Эти тесты существенно сужают содержание образования до жесткого списка задач и алгоритмов их решения (для основной массы учащихся — «троечников» и «четверочников»), зачастую вплоть до жестких шаблонов оформления решений.

«Прагматическая» задача почти полностью потеряла смысл в современном нам цифровом обществе, сменившем индустриальное. Осталась лишь огромная сила инерции человеческого сознания, которое не готово следовать за бытием. Это инерция планов и интересов авторов и редакторов учебников, преподавателей педвузов и институтов повышения квалификации, учителей, родителей и всего общества. В качестве формального прикрытия необходимости достижения этой псевдопрагматической цели выдвигаются как раз метапредметные аргументы: утверждается, что фактически реализуемое содержание образования способствует «развитию логики», «воспитанию мышления»! Однако эти метапредметные аргументы ничем не подтверждаются. Ниоткуда не вытекает, что освоение вычислительных навыков способствует достижению метапредметных целей лучше, чем изучение древних языков, как считалось когда-то. Мы полагаем, что метапредметные цели намного эффективнее достигаются решением посильных олимпиадных задач. Но сила инерции пока еще преодолевает отрицание школы большинством детей и сомнения горстки родителей.

Стоящая перед учащимся цель пройти итоговую аттестацию на практике означает, что значительную долю его времени и сил занимает «натаскивание». В простейших заданиях ЕГЭ и ЕНТ такая подготовка предполагает запрет думать, выработку полного автоматизма реакций: ты должен заранее знать, что делать, у тебя на эту задачу 40 секунд, на эту — 1 минута 30 секунд, необходимо быстро включить внутренний арифмометр (заранее запрограммированный) плюс механизм проверки.

Введение ЕГЭ и ЕНТ можно в целом считать движением, противоположным гуманитаризации, так как в результате их введения:

- принципиально снижается значимость развития речи и сужаются классы задач — для успешной сдачи этих экзаменов

не требуется понимать сколько-нибудь сложные и объемные тексты, так как тесты заданий предельно стандартизированы и имеют минимальный размер; создавать тексты при выполнении заданий вообще не требуется;

- исчезает потребность в самостоятельном логическом мышлении — большая часть заданий ЕГЭ и ЕНТ предполагает прямое выполнение выученного алгоритма решения и запись заученного образца решения.

Обсуждение вопроса, насколько данные аттестационные системы позволяют достичь других целей — унификации требований к выпускникам (и к выпускным письменным работам), объективного измерения достижения образовательными организациями целей, устанавливаемых внутри этих систем, борьбы с коррупцией и проч., — мы оставляем за пределами данной работы.

3.3. Проблема преемственности сегодня

Два с половиной десятилетия назад Г.В. Дорофеев [1999] выражал серьезную озабоченность содержанием политики министерства по отношению к многообразию существующей и создаваемой учебной литературы — тем, насколько она способна обеспечить преемственность образования.

За истекший период в Российской Федерации в ходе формирования поля учебников и учебных пособий сложилась практика, при которой помимо единой двухуровневой государственной аттестации принимаются единые предметные программы, фиксирующие не только результаты, но и последовательность прохождения материала; административный ресурс используется для ежегодного оценивания результатов детей в ходе Всероссийских проверочных работ. В Республике Казахстан программы и проверочные работы регламентируют содержание образования и планируемые результаты еще более жестко. Послабление имеется для школ, вошедших в сети со своими стандартами, например в сеть Международного бакалавриата, и для частных школ [Семенов, Абылкасымова, 2023].

Позиция же Г.В. Дорофеева состояла в том, что принятие системы гуманитарных целей как инвариантной основы стандарта может существенно помочь в формировании единого пространства математического образования. Очевидным дополнением к этой основе, делающим такую конструкцию более реалистичной, могло бы быть использование открытого банка из десятка тысяч заданий: задания, которые выпускник получает на Государственной итоговой аттестации, берутся из этого банка и обладают высокой степенью неожиданности для него.

3.4. Цифровая реальность: необходимость и возможность гуманитаризации

Наиболее важное соображение, которое вытекает из нашего анализа, состоит в том, что основным результатом математического образования является не усвоение конкретных формул и алгоритмов, а овладение математическими моделями деятельности, в частности открытия, изобретения новых фактов и алгоритмов, самостоятельного формирования больших идей и метапредметных результатов.

Использование цифровых технологий в работе школы сегодня позволяет:

- учащемуся достичь целей в умении решать основную массу задач с большей скоростью и надежностью; освоить эти умения за принципиально меньшее время;
- разработчикам программ радикально повысить уровень «неожиданности» и разнообразия при создании задач курса математики;
- учителям поддерживать индивидуальную траекторию каждого учащегося в его собственной зоне ближайшего развития и неожиданности.

Заключение

За прошедшие десятилетия положение о гуманитарных, как пишет Г.В. Дорофеев, целях образования стало практически общим местом, фактически вошло в стандарт. Две цели общего образования по Дорофееву — общекультурную и предпрофессиональную, являющиеся и источниками мотивации, можно сегодня сформулировать как:

- мастерство (скорость и безошибочность) как с использованием цифровых инструментов, так и без их использования;
- творчество (неожиданные задачи);
- понимание, внутриспредметные связи, моделирование (большие идеи в их последовательности, взаимосвязи, логике развития, соотношении с реальностью и другими областями знания).

Однако к реализации этих целей наша система образования практически не приблизилась. Наоборот, усиливающаяся регламентация — Государственная итоговая аттестация, Всероссийские проверочные работы, программы в России и аналогичные инструменты в Казахстане — закрепляют традиционные модели и цели. Пропасть между школой и цифровым миром растет, мотивация учащихся падает.

В этих условиях представляется перспективным создание (может быть, начиная с негосударственных структур) в казахстанском образовании экосистемы, объединяющей школы и педагогические вузы, которые реализуют описанную педагогическую

модель. Результаты работы такой экосистемы, помимо прямого вклада в образование Казахстана, могут указать путь дальнейшего развития государственного образования в обеих наших странах.

Благодарности Статья подготовлена при поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант № AP19680007 (руководитель — А.Е. Абылкасымова).

Авторы выражают признательность Елене Александровне Седовой за предоставленную информацию и внимательное редактирование. Елена Александровна, по существу, является одним из авторов настоящей публикации.

Мы также благодарим В.А. Болотова, Г.С. Ковалеву, О.Б. Логинову и И.М. Реморенко за многолетние обсуждения затронутых в работе вопросов.

Также мы благодарны анонимному рецензенту за представленный «внешний взгляд» на содержание статьи; этот взгляд помог нам прояснить методологию нашего исследования, еще раз обратиться к вопросу о том, почему декларации в системе образования не влияют на реальность этой системы.

Литература

1. Альтшуллер Г.С. (1979) *Творчество как точная наука. Теория решения изобретательских задач*. М.: Советское радио. Доступно по ссылке: <https://pqm-online.com/assets/files/lib/books/altshuller.pdf> (дата обращения 01.11.2024).
2. Асмолов А.Г. (2016) Гонки за будущим: ...и вот наступило потом. *Образовательная политика*, № 4 (74), сс. 2–6.
3. Асмолов А.Г., Шехтер Е.Д., Черноризов А.М. (2018) Преадаптация к неопределенности как стратегия навигации развивающихся систем: маршруты эволюции. *Mobilis in mobili: личность в эпоху перемен* (ред. А. Асмолов), М.: Языки славянских культур, сс. 78–109.
4. Боно де Э. (2015) *Искусство думать: Латеральное мышление как способ решения сложных задач*. М.: Альпина Паблишер.
5. Гладкий А.В. (1990) Об уровне математической культуры выпускников средней школы. *Математика в школе*, № 4, сс. 7–9.
6. Гнеденко Б.В. (1961) Александр Яковлевич Хинчин. *Математическое просвещение*, вып. 6, сс. 3–6. Доступно по ссылке: https://www.mathedu.ru/text/tp_1961_v6/p2/ (дата обращения 01.11.2024).
7. Дорофеев Г.В. (1999) Единая концепция курса математики как решение проблемы преемственности. *Стандарты и мониторинг в образовании*, № 3, сс. 11–16. Доступно по ссылке: <https://znanium.ru/read?id=46540&page-num=12> (дата обращения 01.11.2024).
8. Дорофеев Г.В. (2002) Не обучение математике, а обучение математикой! *Школьное обозрение*, № 5. Доступно по ссылке: <http://vivovoco.astronet.ru/VV/PAPERS/ECCE/MATH/MATH.HTM> (дата обращения 01.11.2024).
9. Дорофеев Г.В. (2006) Гуманитарно-ориентированное обучение математике: концептуальный аспект. *Математика. 5–6 кл.: Методические материалы к учебнику Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон* (ред. М.А. Кубышева), М.: Ювента, сс. 8–23.

10. Дорофеев Г.В. (2005) Новые стандарты по математике в школе России — путь развития школьного математического образования. *Сборник научных трудов математического факультета МГПУ*. М.: МГПУ, сс. 195–206.
11. Ермаков В.П. (1907) *Анализ бесконечно малых величин: Дифференциалы, интегралы и дифференциальные уравнения: Лекции проф. В.П. Ермакова, читанные в Политехническом институте. Ч. 1*. Киев: Лито-типография т-ва И.Н. Кушнерев и К°.
12. Кудрявцев Л.Д. (1985) *Современная математика и ее преподавание*. М.: Наука.
13. Леонтьев Д.А. (2018) Жизнь на волнах хаоса: уроки Пригожина и Талеба. *Mobilis in mobili: личность в эпоху перемен* (ред. А. Асмолов), М.: Языки славянских культур, сс. 29–39.
14. Пойа Д. (1976) *Математическое открытие: решение задач: основные понятия, изучение и преподавание*. М.: Наука.
15. Семенов А.Л. (2023) О продолжении российского математического образования в XXI веке. *Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование*, т. 21, № 2, сс. 7–45. <http://dx.doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45>
16. Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е. (2023) Цифровые технологии как фактор преемственности в математическом образовании. *Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сборник тезисов докладов международной научной конференции (Елец, 2023 г., 29 сентября — 1 октября)*, Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, сс. 10–15.
17. Семенов А.Л., Абылкасымова А.Е. (2024) «Каждый человек может овладеть правильным использованием математических методов»: актуальность идей Л.Д. Кудрявцева для современного математического образования. *Высшее образование в России*, т. 33, № 4, сс. 84–100. <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2024-33-4-84-100>
18. Фирсов В.В. (2012a) Воздуха, воздуха!.. *Учим математикой*. М.: Просвещение, сс. 39–44. Доступно по ссылке: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p39/ (дата обращения 01.11.2024).
19. Фирсов В.В. (2012b) К построению новой стратегии реформирования образования. *Учим математикой*. М.: Просвещение, сс. 49–57. Доступно по ссылке: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p49/ (дата обращения 01.11.2024).
20. Фирсов В.В. (2012c) Методика обучения математике как научная дисциплина. *Учим математикой*. М.: Просвещение, сс. 160–172. Доступно по ссылке: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p161/ (дата обращения 01.11.2024).
21. Хинчин А.Я. (1961a) О воспитательном эффекте уроков математики. *Математическое просвещение*, вып. 6, сс. 7–28. Доступно по ссылке: https://www.mathedu.ru/text/mp_1961_v6/p8/ (дата обращения 01.11.2024).
22. Хинчин А.Я. (1961b) О так называемых «задачах на соображение» в курсе арифметики. *Математическое просвещение*, т. 2, № 6, сс. 29–36. Доступно по ссылке: https://www.mathedu.ru/text/mp_1961_v6/p30/ (дата обращения 01.11.2024).
23. Abylkassymova A.E., Tuyakov Y.A., Yerkisheva Zh.S., Turganbayeva Zh.N., Bazhi A. (2024) Foundations of the Methodology for Continuity of Teaching Mathematics at School and University in the Context of Digital Renewal of the Educational Environment. *Academic Journal of Interdisciplinary Studies*, vol. 13, no 5, pp. 217–237. <https://doi.org/10.36941/ajis-2024-0161>

References

Abylkassymova A.E., Tuyakov Y.A., Yerkisheva Zh.S., Turganbayeva Zh.N., Bazhi A. (2024) Foundations of the Methodology for Continuity of Teaching Mathematics

- at School and University in the Context of Digital Renewal of the Educational Environment. *Academic Journal of Interdisciplinary Studies*, vol. 13, no 5, pp. 217–237. <https://doi.org/10.36941/ajis-2024-0161>
- Altshuller G.S. (1979) *Creativity as an Exact Science. Theory of Solving Inventive Tasks*. Moscow: Sovetskoe radio (In Russian). Available at: <https://pqm-online.com/assets/files/lib/books/altshuller.pdf> (accessed 1 November 2024).
- Asmolov A.G. (2016) Racing for the Future:... and Then it Came. *Educational Policy*, no 4 (74), pp. 2–6 (In Russian).
- Asmolov A.G., Schechter E.D., Chernorizov A.M. (2018) Preadaptation to Uncertainty as a Navigation Strategy for Developing Systems: Evolutionary Routes. *Mobilis in Mobili: Personality in an Era of Change* (ed. A. Asmolov), Moscow: Languages of Slavic Cultures, pp. 78–109 (In Russian).
- Bono de E. (2015) *Lateral Thinking*. Moscow: Alpina Publisher (In Russian).
- Dorofeev G.V. (1999) Unified Concept of a Mathematics Course as a Solution to the Problem of Continuity. *Standards and Monitoring in Education*, no 3, pp. 11–16 (In Russian). Available at: <https://znanium.ru/read?id=46540&pagenum=12> (accessed 1 November 2024).
- Dorofeev G.V. (2002) Not Teaching Mathematics, but Teaching by Mathematics! *Shkol'noe Obozrenie*, no 5 (In Russian). Available at: <http://vivovoco.astronet.ru/VV/PAPERS/ECCE/MATH/MATH.HTM> (accessed 1 November 2024).
- Dorofeev G.V. (2006) Humanities-Oriented Teaching of Mathematics: A Conceptual Aspect. *Mathematics. 5–6 cl.: Methodological Materials for the Textbook by G.V. Dorofeev, L.G. Peterson* (ed. M.A. Kubyshva). Moscow: Uwenta, pp. 8–23 (In Russian).
- Dorofeev G.V. (2005) New Standards in Mathematics in Russian Schools — the Way to Develop School Mathematics Education. *Collection of Scientific Papers of the Faculty of Mathematics of MGPU*. Moscow: MGPU, pp. 195–206 (In Russian).
- Ermakov V.P. (1907) *Analysis of Infinitesimal Quantities: Differentials, Integrals and Differential Equations: Lectures by Prof. V.P. Ermakov, Delivered at the Polytechnic Institute. Part 1*. Kiev: Lito-printing house of I.N. Kushnerev and Co. (In Russian).
- Firsov V.V. (2012b) To Build a New Strategy for Reforming Education. *We Teach by Mathematics*. Moscow: Prosveshchenie, pp. 49–57 (In Russian). Available at: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p49/ (accessed 1 November 2024).
- Firsov V.V. (2012c) Methodology of Teaching Mathematics as a Scientific Discipline. *We Teach by Mathematics*. Moscow: Prosveshchenie, pp. 160–172 (In Russian). Available at: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p161/ (accessed 1 November 2024).
- Firsov V.V. (2012a) More Air, Air!.. *We Teach by Mathematics*. Moscow: Prosveshchenie, pp. 39–44 (In Russian). Available at: https://www.mathedu.ru/text/firsov_uchim_matematikoy_2012/p39/ (accessed 1 November 2024).
- Gladkiy A.V. (1990) On the Level of Mathematical Culture of High School Graduates. *Matematika v shkole*, vol. 4, pp. 7–9 (In Russian).
- Gnedenko B.V. (1961) Alexander Yakovlevich Khinchin. *Matematicheskoe prosveshchenie*, vol. 2, no 6, pp. 3–6. (In Russian). Available at: https://www.mathedu.ru/text/mp_1961_v6/p2/ (accessed 1 November 2024).
- Khinchin A.Ya. (1961a) On the Educational Effect of Mathematics Lessons. *Matematicheskoe prosveshchenie*, iss. 6, pp. 7–28 (In Russian). Available at: https://www.mathedu.ru/text/mp_1961_v6/p8/ (accessed 1 November 2024).
- Khinchin A.Ya. (1961) On the So-Called “Problems of Consideration” in the Course of Arithmetic. *Matematicheskoe prosveshchenie*, vol. 2, no 6, pp. 29–36 (In Russian). Available at: https://www.mathedu.ru/text/mp_1961_v6/p30/ (accessed 1 November 2024).

- Kudryavtsev L.D. (1985) *Modern Mathematics and Its Teaching*. Moscow: Nauka (In Russian).
- Leontiev D.A. (2018) Life on the Waves of Chaos: Lessons from Prigozhin and Taleb. *Mobilis in Mobili: Personality in an Era of Change* (ed. A. Asmolov), Moscow: Languages of Slavic Cultures, pp. 29–39 (In Russian).
- Pólya G. (1962) *Mathematical Discovery. On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Moscow: Nauka (In Russian).
- Semenov A.L. (2023) On the Continuation of Russian Mathematical Education in the XXI Century. *Moscow University Pedagogical Education Bulletin*, vol. 21, no 2, pp. 7–45 (In Russian). <https://doi.org/10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45>
- Semenov A.L., Abylkassymova A.E. (2023) Digital Technologies as a Factor of Continuity in Mathematical Education. Proceedings of the *Fundamental Problems of Teaching Mathematics, Computer Science and Informatization of Education: International Scientific Conference (Yelets, 2023, September 29 – October 1)*, Yelets: Yelets State University named after I.A. Bunin, pp. 10–15 (In Russian).
- Semenov A.L., Abylkassymova A.E. (2024) “Everyone Can Master the Correct Use of Mathematical Methods”: The Relevance of L.D. Kudryavtsev’s Ideas for Modern Mathematical Education. *Vysshee obrazovanie v Rossii / Higher Education in Russia*, vol. 33, no 4, pp. 84–100 (In Russian). <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2024-33-4-84-100>