А.Л. Семенов

СОВРЕМЕННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ШКОЛЕ

Личное (в/от)ступление

Несколько лет назад на конференции по математическому образованию в Дубне я обратил внимание, что многие присутствующие говорили: «Я выступаю как представитель высшего образования...», или «Я могу судить о том, что происходит в школе, по своим внукам...», или «Как автор школьных учебников, я хочу сказать...», или «В классе, где я преподаю...» Примерив, как говорится, «эти шапки на себя», я обнаружил, что все они в какой-то степени мне впору. Я — профессиональный математик, с многолетним опытом преподавания в МГУ, имеющий опыт создания учебников для всех школ страны, работавший в школе, в том числе в начальной, отвечающий за повышение квалификации всех учителей одного из регионов России, отец и дед многочисленных детей и внуков, среди которых есть и сегодняшний учитель (учительница) математики. В течение последних 17 лет я вместе со своими друзьями, коллегами и учениками пытался понять, каким может быть содержание математического образования в средней школе, чтобы в наибольшей степени отвечать современным общим целям образования. Попытка эта была предпринята вначале в Академии наук СССР как часть работы по созданию основ новой системы советского школьного образования, для которой существенным было бы применение того, что мы сегодня называем проектно-исследовательским подходом, а также использование компьютеров.

Данный текст написан в разных планах и с различных позиций. Вначале обсуждаются общие цели математического образования и те изменения, которые эти цели претерпевают. Затем речь идет об экспериментальном математическом курсе, более 15 лет используемом в сотнях начальных школ. Мы начнем с неформального изложения основных идей и нововведений этого курса и завершим (в следующих номерах журнала) формальным описанием его содержания; в последнем разделе данной части рассматриваются пути развития школьного математического образования в стране в целом, и в частности связанные с принятием стандарта общего среднего образования. Сознавая, что жанр научной публикации не предполагает личных отступлений, я все же решился на них в данной работе — школа все-таки вещь живая. Отметим также, что мы используем в тексте термин «информатическая математика», считая, что приблизительный его смысл всем ясен, а необходимые детали будут уточнены по ходу дела.

Цели и результаты школьного математического образования

Мы начнем с целей и задач математического образования, а потом объясним, при чем тут информатика, объединенная с математикой в названии статьи.

К результатам математического образования обычно относят следующее.

■ Знание наизусть некоторого числа соответствий, т.е. умение при предъявлении цепочки символов «12» произносить «двенадцать»; на слова «Шестью шесть?» отвечать «Тридцать шесть»; в строчке «6 х 6 = …» дописывать «36»; называть написанные и записывать названные буквы латинского и греческого алфавитов (не все); на слова «Формула корней квадратного уравнения» писать «Для уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, обозначим через D… Если $D < 0$, то у уравнения нет корней. Если…»; на слова «Теорема Пифагора?» произносить «Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Для доказательства, в прямоугольном треугольнике ABC…»

■ Освоение конкретных способов деятельности (навыков) работы с математическими объектами по формальным правилам (сообщаемое детям описание этих правил может быть и не вполне формальным). К видам деятельности, о которых мы говорим, относятся, например, сложение двух шестизначных чисел, пересчет денег в кошельке.

■ Освоение общих способов деятельности и стратегий, применимых в различных ситуациях. Например, освоение таких приемов логических рассуждений, как: цепочка следствий «Всегда, когда имеет место A, имеет место $Б$, всегда, когда имеет место $Б$, имеет место B… Значит…»; перебор возможностей — «У нас имеется три возможности, давайте рассмотрим каждую из них по очереди». Указанные виды деятельности не сводятся только к тем примерам, которые мы привели и которые называются «логическим рассуждением». Еще одним примером является умение следовать любой инструкции, например инструкции по запуску и эксплуатации стиральной машины. Другой пример — это умение освоить правила новой игры, например игры в го, и следовать этим правилам.

■ Освоение некоторых неформализуемых (эвристических) стратегий деятельности, используемых, например, при решении тригонометрических уравнений и доказательстве геометрических теорем или при игре в шахматы. Сюда же относится умение «увидеть формулу или теорему» и «применить» это видение (отождествление, интерпретацию) в той или иной ситуации, в том числе в повседневной жизни, при решении инженерной задачи, в научном исследовании. Эти стратегии формируются в деятельности с математическими объектами, однако возможно, что они, как и стратегии из предыдущего пункта, могут применяться и в более широком контексте.

■ Еще более общее развитие интеллектуальных способностей. По этому поводу мне что-либо сказать трудно.

■ Воспитание чувства красоты интеллектуальных рассуждений, умения радоваться интеллектуальным достижениям, интеллектуальной честности и независимости, внутренней дисциплины и упорства. Это означает, в частности, что учащийся понимает и осознает, что оценка правильности решения им задачи не зависит от красоты оформления или исходного мнения педагога о нем, а зависит только от интеллектуального содержания этого решения. Так же обстоит дело и в игре в шахматы, где выигрыш определяется последовательностью ходов, а не прошлыми заслугами и личной аккуратностью игроков.

Изменения в математике и изменения в мире

Вышеперечисленные в столь общей форме цели не претерпели изменений за последние 100, а возможно, и 1000 лет. В XX в., однако, существенно трансформировался мир математических объектов и процессов, с которыми работают математики, ученые других областей, профессионалы, постоянно имеющие дело с математическими объектами, а также все люди, когда им приходится обращаться к математике.

■ В чистой математике наиболее радикальное изменение состояло в том, что математика включила в сферу своего изучения информационные объекты и процессы; чрезвычайно расширилась область, относящаяся к изучению математическими средствами человеческого мышления, коммуникации и формализованной деятельности. К этой области относятся: математическая логика, математическая лингвистика, теория информации, теория алгоритмов. В частности, математика попыталась изучить сами математические конструкции, рассуждения и действия математическими средствами, эти попытки получили название «метаматематика». Возникающие при этом объекты изучения не были похожи на классические математические объекты — векторы в трехмерном евклидовом пространстве, непрерывно дифференцируемые функции и т.п. Новые объекты можно в целом охарактеризовать как *дискретные*. Замечательно, что эти «новые», «информатические» объекты и процессы могут служить естественным фундаментом и для всей математики, кроме того, во многих случаях они обладают высокой степенью наглядности и даже осязаемости.

■ Полученные математиками результаты нашли применение в лингвистике, биологии, теории управления и т.д. При этом наибольший объем приложений в этих дисциплинах оказался связанным с дискретными объектами.

■ Беспрецедентным стало применение математики при построении и использовании компьютеров. Перечисленные выше области математики оказались в очень большой степени и очень быстро (в течение 30–40 лет), востребованными компьютерными теоретиками и практиками, т.е. информатиками. При этом опять-таки основные объекты были дискретными. Именно с такими объектами имеет дело компьютер. Непрерывные модели при использовании в компьютерном моделировании (например, крыла самолета или траектории межконтинентальной баллистической ракеты) преобразуются в дискретные. (Естественные для математики XIX в. электронно реализованные непрерывные, аналоговые модели всего за несколько лет проиграли дискретным, прежде всего в силу своей неуниверсальности.)

■ Сегодня человек, обращающийся в повседневной, научной, инженерной, экономической, производственной деятельности к математике, в большинстве случаев делает это через калькулятор или компьютер. Тем самым он оказывается в том же мире дискретных объектов — он вводит с помощью клавиатуры символы и видит на экране изображение, состоящее из отдельных элементиков и т.д.

Изменения в российском школьном математическом образовании

Итак, цели изучения математики в общем плане не изменились, изменились объекты и методы «взрослой» математики. Основное содержание российской школьной математики сегодня осталось почти тем же, что и 150 лет назад, тогда как содержание самой математики, ее приложений, то, как математика используется в жизни человека, изменилось коренным образом. Однако две масштабные и серьезные попытки модернизации школьного математического образования были все же осуществлены в России в течение последнего полувека.

Первая из них — введение элементов математического анализа, трансформационной геометрии и теоретико-множественного подхода в 1960–1970 гг. Этот эксперимент во многом не удался, однако школьная практика отобрала из него ряд позитивных, действительно модернизационных элементов. Весьма вероятно, что эти элементы нуждаются в закреплении.

Вторая попытка — введение в советское среднее образование в масштабах всей страны элементов информатической математики в курсе «Основы информатики и вычислительной техники». Эта мера, хотя с точки зрения масштабности перестройки содержания всего школьного образования и является менее глобальной, оказалась более успешной. В той или иной форме построение алгоритмов и связанное с этим развитие алгоритмического мышления присутствуют сегодня и в учебниках по информатике, и в реальной школе. Результаты российской школы в этом направлении заметны и на мировом уровне. (Тем не менее опасность исчезновения в школе этой ветви математики, замены ее чисто технологическими элементами или чисто информирующим псевдотеоретическим подходом остается.)

На ступени начального образования также велась работа по модернизации математического образования. Одно из направлений такой работы — это при сохранении достаточно традиционного с точки зрения математики как науки арифметического содержания, попытаться модернизировать ***дидактику***. Сюда можно отнести преподавание математики по основным «альтернативным» системам начальной школы — системам Эльконина — Давыдова и Занкова.

Другое направление модернизации начального образования состоит в определенной модернизации его ***содержания***, состоящей во введении элементов наглядной дискретной математики в «общеразвивающем» и диагностирующем контекстах (задачи типа «кто здесь лишний», «продолжи цепочку...»). Связанные с этим направлением виды деятельности обладают, по нашему мнению, крупным недостатком. В большинстве случаев они противоречат одной из задач математического образования — формированию у учащегося внутренней модели математической реальности, представления об объективности математической истины, ее независимости от мнения учителя или автора учебника. Как правило, формируется модель «действуй, как я говорю, и не задавай лишних вопросов». Безусловно, модель подражания важна во всяком обучении, и в математике тоже. Однако именно в математике опасность фиксации этой модели как основной особенно велика. Одна из классических задач этого направления, странным образом появившаяся в нескольких учебниках, такова: на картинке изображено несколько стоящих рядом животных; ребенка спрашивают, кто стоит слева от зайца? (Большинство педагогов и многие учащиеся отвечают исходя из того, кого *они* видят слева от зайца. Но некоторые школьники обращаются с вопросом к зайцу: «кто стоит слева от тебя?»)

Еще одним направлением в преподавании математики в начальной школе является дополнение ее компонентами «информатической», комбинаторно-логической математики. Это позволяет, в частности, построить достаточно полный и систематический математический курс.

Наконец, последним направлением, отчасти пересекающимся с предыдущими, является широкое проименение в начальном образовании наглядных и даже осязаемых, телесных, трехмерных объектов, заданий, связанных с подсчетом и сортировкой этих объектов, а также построением стратегий выигрыша в понятных детям играх.

Даже столь краткое и субъективное перечисление направлений развития начального математического образования демонстрирует, что идущие там процессы достаточно существенны. Однако работа по созданию стандартов основной и старшей школы практически не привязаны к формированию содержания начальной школы.

Еще одно важное направление модернизации математического образования, появившееся недавно, но потребность в котором назревала давно — это введение ***вероятности и статистики***. Вероятностная модель мира, само по себе представление о том, что возможны количественные оценки правдоподобия и что эти оценки подчиняются определенным законам, — это то, что крайне необходимо сегодня и для развития личности и для обеспечения конкурентоспособности на рынке труда. Не меньшее значение имеет и статистический анализ данных как часть культуры производства, достоверного исследования и анализа, формирования гражданской позиции. Данное направление модернизации включило в себя и небольшую часть алгоритмической математики, связанную с построением и перебором комбинаторных объектов. Это нововведение в курсе школьной математики было осуществлено в период разработки стандартов 2004 г., что позволило его учесть.

Наконец, в ходе подготовки стандартов 2001–2003 гг. группа разработчиков предложила более явно выделить и усилить логическую и языковую (сознательно-коммуникативную) компоненты математического образования. В некоторых отношениях это предложение отвечало задачам модернизации начального математического и информатического образования, в какой-то мере было учтено в стандарте 2004 г.

Особую актуальность в общем образовании должна была бы сейчас иметь область, традиционно называемая ***прикладной математикой***. В школьных курсах математики она представлена текстовыми задачами, физики — большим корпусом задач по механике, электростатике, оптике и многим другим разделам. Однако в школьной математике эта область медленно теряет свое значение, учителя склонны как можно скорее, особенно в работе со слабыми учащимися, «проскакивать» этап перехода от содержательной модели к формально-математической и дальше проверяют качество алгебраических преобразований. Содержание задач достаточно бедно и мало связано с реальным миром, окружающим ребенка. При этом в других странах прикладная направленность курса математики растет. Наиболее наглядно слабость этой стороны подготовки российских учащихся видна в результатах так называемых международных сравнительных исследований. В стандарте 2004 г. предпринята попытка усилить прикладные моменты. Однако еще более существенную роль здесь может сыграть более серьезная координация с физикой. Следовало бы говорить о стандарте не обучения по предмету «математика», а о стандарте математической подготовки в средней школе. (Существенная часть этой подготовки должна идти в курсах физики, экономики, информатики.)

Взгляд на математику как культурно-историческое явление, драма идей и развития человеческого духа также все более отодвигаются на периферию образования в реальной школе. В то же время этот взгляд, как нам кажется, может стать реальной основой, например, для формирования современного видения роли геометрии в школе.

Компьютер остается практически не включенным в широкое математическое образование (если не говорить о его роли в изучении разделов математики, отнесенных к предмету «Информатика» или «Информатика и информационные технологии»). При этом он является мощным ресурсом образовательного опыта — сегодня на компьютере можно поставить эксперимент по любой школьной задаче, иллюстрирующий ее, проливающий свет на поиск решения. Компьютеру можно поручить те или иные компоненты решения и его проверки. Особо полезно это для относительно слабых учащихся, которые благодаря компьютеру не теряют интереса к математике, у которых не формируется ощущение, что они не понимают вообще ничего. Использование компьютера — существенный ресурс разгрузки. Калькуляторы уже позволили разгрузить курс физики, но вызывают понятную (хотя, нам кажется, несправедливую) подозрительность у математиков. Использование компьютера в изучении математики войдет в программу очередного международного сравнительного анализа.

Информатическая математика

В российской школе, где традиционная, классическая математика возрастом более полутора веков представлена достойно, пока не нашлось и, вероятно, в ближайшем будущем не найдется места для разделов математики, которые можно назвать «информатической математикой» и которые столь существенны для использования математики.

Однако российскому математическому образованию повезло. Введенный в середине 1980-х гг. курс «Основы информатики и вычислительной техники», который сегодня обычно называют «Информатика и информационные технологии», включил в себя достаточно серьезный (хотя и небольшой) и в то же время доступный компонент информатической математики. Задачи, которые при этом решались учащимися, в основном были связаны с построением алгоритмов, т.е., по существу, с программированием. Однако это «программирование» шло в математической среде, освобожденной от обилия технических деталей, в силу естественных причин присущих современным «настоящим», «производственным» языкам программирования. Наглядность процессов, которые предлагалось запрограммировать, и простота инструментов делали возможным такое программирование даже без компьютера.

Информатическая математика в курсе «Информатика» для начальной школы (1986–2004)

Язык для разговора о языке

Конкретная работа с математикой началась у нас с построения начального образования. Исходной установкой было сохранение максимума из сегодняшнего и традиционного начального образования при достижении в деятельности учащегося и учителя большей логики, большего взаимопонимания. Рассматривая курс русского языка, мы обнаружили, что в нем достаточно быстро появляются так называемые правила, например: «ЖИ, ШИ пиши через И», «переноси по слогам». Первое из этих правил или тавтологично, или приводит к тому, что дети пишут «ж***и***лезо». Второе правило, как показал опрос, опирается на представление учителей и хорошо успевающих учащихся, что всякое русское слово можно единственным образом разбить на слоги. (В принятых научных трактовках вопроса — это не так.)

Пытаясь достичь нормального когнитивного климата в классе, мы пришли к выводу, что необходима некоторая простая и ясная, однозначно и одинаково понимаемая учителем и учащимся *языковая основа* для обсуждения понятий.

Объекты, инструменты, модели деятельности

Цепочки. В математике базовым объектом языка является цепочка — конечная последовательность. В частности, слово — это цепочка символов, предложение — цепочка слов, абзац — цепочка предложений и т.д. Более того, ведь и число — это цепочка цифр, и правила действий с числами объясняются в терминах расположения цифр в этой цепочке — «следующий разряд» и т.д. Цепочка — основной объект и в информатике: память компьютера — это цепочка нулей и единиц, любое сообщение, любая программа, ее исполнение (последовательность действий) — тоже цепочки. Это, в свою очередь, конечно, связано с тем, что в своем мышлении, коммуникации и деятельности, происходящих, как и все на свете, в *линейном* времени, человек вычленяет отдельные линейно расположенные, т.е. образующие *цепочку*, элементы.

Обнаружив это обстоятельство (конечно, хорошо известное специалистам в упоминаемых областях), мы стали перед дилеммой: понимая, что в разных ситуациях учащиеся и учителя работают с цепочками, стараться все же не упоминать о цепочках явно или, наоборот, ввести это понятие. В последнем случае следовало принять еще решения: первое — как ввести, чтобы понятие реально воспринималось и использовалось, второе — какую нагрузку, с точки зрения общих целей образования, это понятие будет нести помимо служебного использования в курсах языка, математики, информатики. Кроме этого, оставался еще вопрос о терминологии: как называть цепочки и связанные с ними свойства и операции. (В русском словаре математической лингвистики слово «цепочка» укоренилось, но, может быть, надо его пересмотреть для школы?)

Ответом на первый вопрос оказалось введение понятия цепочки, как и других понятий и конструкций, на примерах — наглядных, графических и др., которые можно взять в руки. Другими словами, помимо цепочек букв, цифр и других символов, вводились цепочки из нарисованных на бумаге или нанизываемых на веревку бусин. Что касается того, каких общих образовательных целей мы достигаем с помощью цепочек, то оказалось, что в мире цепочек при сохранении наглядности деятельности формулируются задачи, требующие того самого логического мышления (причем не в форме работы с абстрактными определениями, а в виде конструирования конкретных объектов и проверки наглядных свойств), на развитие которого претендует арифметика. Правда, надо отметить, что значимость арифметики (в традиционной форме) как *прикладной* области значительно упала в связи с появлением калькулятора. Примером того, как цепочки могут прояснять даже привычные математические понятия, является интерпретация скобок с помощью них. Бусины могут означать последовательность выполнения действий, при вычислении мы заменяем бусину значением выражения, которое в ней находится. Конечно, бусины получаются не круглыми, а вытянутыми, и в одной бусине может помещаться несколько других. Скобки возникают как остатки от бусин, когда верхнюю и нижнюю часть оболочки бусины стерли. Однако восстановить бусины можно и это вполне объясняет и порядок действий.

Мешки. Введением цепочек, однако, дело не ограничилось. Нам понадобилось еще кое-что. Прежде всего — это еще один вид объектов — мешки. В отличие от цепочек, возникших из линейной последовательности времени, мешки возникают при параллельном, одновременном восприятии и рассмотрении объектов в пространстве или альтернатив в потенциальных действиях.

Как и в случае с цепочками, от ребенка и взрослого не требуется никаких абстрактных представлений. Мешки — это то, что можно потрогать, их содержимое можно нарисовать на листе бумаги. Еще и еще раз подчеркнем: в то время как числа, с которыми оперируют дети, очень быстро становятся абстрактными цепочками символов (представьте себе *количество* 4386!), цепочки и мешки можно нарисовать и охватить взглядом. Все их свойства и операции над ними видны на одном листе бумаги. При этом задачи могут оказываться очень сложными.

Мешки, о которых мы говорим, похожи на «взрослые» множества. Однако у множеств есть одно странное свойство: если в множество из яблока и числа 6 добавить яблоко, то это множество не изменится, если добавить число 6 — тоже! Результат получается, только если мы добавляем что-то новенькое, например сливу. С мешками не так: добавил яблоко — в мешке два яблока, добавил число 6 — в мешке две шестерки. В этом отношении мешки больше похожи на числа, чем множества, где числа приходится вводить несколько искусственно. Однако мешки могут обеспечивать все те математические потребности, которые обеспечиваются множествами.

И здесь также возникает проблема выбора названия, имени для объекта. Слово «мешок» мы взяли исходя из того, что оно действительно соответствует существу дела, а также потому, что наши мешки рассматривались в англоязычном программировании под именем «bag». Другим, более «солидным» названием является «мультимножества» (multisets).

Логика утверждений и рассуждений. Итак, мы обеспечили себя самыми необходимыми и естественными объектами. Но теперь мы хотим *говорить* и *рассуждать* о них. При этом мы просто фиксируем и уточняем то, что учитель и автор учебника и так используют и надеются, что ученик их понимает. Например, мы начали систематически употреблять конструкции типа «Все утверждения на этой странице (или в условии этой задачи, или в этом мешке утверждений) истинны», «Это утверждение истинно для всех объектов в этом мешке», «Среди утверждений на этой странице найдется истинное», «Среди объектов на этой странице найдется такой, для которого это утверждение истинно», а также — «Значением этого имени является объект, здесь нарисованный», «Эти два объекта одинаковы». Помимо свойства одинаковости, естественно, определяются и другие свойства рассматриваемых объектов.

(Для профессионалов заметим, что подход к логике, где не используются конъюнкция и дизъюнкция, а только кванторы, и переменные и константы не различаются, достаточно распространен.)

Логика деятельности. Важной темой курса является выработка моделей и стратегий деятельности (можно сказать — логики деятельности), существенно выходящих за математический контекст. К ним относятся стратегии перебора вариантов (и даже вообще — представление о возможности выбора из альтернатив), стратегии разделения задачи на части (подзадачи) и разделения труда с последующим объединением результатов, стратегия повышения надежности деятельности путем дублирования и стратегия выделения «узкого места».

В математике, например, стратегия перебора вариантов может рассматриваться и в контексте многоступенчатого выбора, с (гипотетическим) возвратом из тупиковых ситуаций, и в контексте игрового взаимодействия и выбора стратегии в игре. Решающее значение имеет тот факт, что все обсуждающиеся стратегии предлагаются не в виде абстрактных схем для выучивания, что, очевидно, бессмысленно, но проигрываются на практике, в игре, коллективной деятельности. Общие понятия и представления нужны учителю для анализа ситуации совместно с учащимися и постепенного введения словаря такого анализа. Стратегии деятельности, вырабатываемые и обсуждаемые на содержательном уровне, разумеется, без всякой формализации и абстрактных определений в дальнейшем служат основой для понимания общих конструкций построения алгоритмов, с одной стороны, и формулирования конкретных эффективных алгоритмов — с другой.

Параллельно с деятельностью и ее неформальным описанием вводятся и формальные конструкции языка, на котором о деятельности можно говорить. Эти формальные конструкции включают те языковые средства, о которых мы уже говорили (имена, логику утверждений), а также действия и средства построения более сложных действий из более простых (действие присваивания имени значения, операции над объектами, последовательное выполнение двух действий, выполнение того или иного действия в зависимости от истинности данного утверждения, выполнение некоего действия, пока истинно некоторое условие).

Возможности, выбор, деревья. Для планирования деятельности важен учет (мешка) альтернатив. Если мы рассматриваем процесс в несколько шагов, то альтернативы образуют дерево. При этом реально в одном процессе реализуется один путь в дереве. При выборе из возможных шагов в построении или перемещении объекта мы получаем различные ситуации элементарной комбинаторики и можем описывать вероятностные явления. В наших рассмотрениях встречаются и иные деревья — классификационные (которые можно интерпретировать в форме выбора того или иного признака) и генеалогические.

Игры, стратегии. Важным специальным видом ситуации многократного выбора является игра (более точно, мы имеем здесь в виду игру двух лиц с полной информацией), где игроки делают свои ходы по очереди. Стратегия выигрыша диктует игроку, какой ему сделать ход, чтобы при любом ответе противника у него был бы ход и т.д., приводящий к выигрышу. Построение деревьев для игр, ясное понимание того, что означает и как строится выигрышная стратегия, одновременно содействуют развитию интуиции и логики.

Системы, взаимодействия. Обсуждение логики человеческих утверждений и действий подталкивает нас к рассмотрению еще одного раздела, который в узком и формальном смысле можно отнести к информатической математике. Речь идет о рассмотрении таких общих понятий, как система, состояние системы, компонент системы, взаимодействие между компонентами, сигнал, управление, обратная связь. Несмотря на важность и общность этих понятий, они не представлены в традиционном школьном образовании, отдельные попытки ввести их в школьный курс информатики нельзя пока признать вполне удачными. Тем не менее нам кажется, что в этом направлении следует продолжить поиск. Пока примеры систем, переходов из одного состояния в другое встречаются в контексте управления исполнителем алгоритма (робот в лабиринте и т.д.) и игр.

Измерения, счет. Математико-информатические объекты и понятия, рассмотренные выше, столь же существенны для сегодняшней математики и вычислительной практики, как и понятия и объекты классической числовой математики. Для школьной же математики последние, как уже отмечалось, все еще остаются основным содержанием математики. Этих причин достаточно для того, чтобы числа заняли достойное место в нашем курсе. Мы, однако, считаем, что нужно уделить существенно больше внимания реальности чисел, тому, откуда они появляются и чему соответствуют, а не заучиванию арифметических правил и таблиц. Поэтому для нас очень важно что-то померить и посчитать. Одним из важных представлений числа является геометрическое, но в большей степени — не как длина отрезка, а как площадь многоугольника на клетчатой бумаге.

Эксперимент. Более явное появление новых объектов и подчеркивание логики нам удалось сочетать с экспериментальным, исследовательским подходом к освоению математики, и в частности, арифметики. При этом мы предполагали и отчасти реализовали метод исследования и открытия в других областях, прежде всего в лингвистике, в естественных науках, отчасти в истории. Метод этот, известный, как и другие педагогические методики, давно, был «переоткрыт» и активно внедрялся в педагогический процесс в XX в. (Дьюи, Пиаже, советская педагогика 20-х гг. XX в. и др.). Однако реально он оставался и остается маргинальным в мировом образовательном сообществе. В то же время его элементы постепенно занимают все большее и большее место в школе. Особенно быстро ареал этого метода начал расширяться с приходом информационных и коммуникационных технологий в школу. (Обсуждение того, с чем это связано — отдельная тема.)

Мы уже упоминали о том, что числа порядка нескольких тысяч остаются абстрактными цепочками знаков для детей. Вместе с тем в распространенных курсах математики для начальной школы подсчет объектов практически отсутствует и ограничивается первым десятком. Серьезное дело подсчета числа зерен гречки в стакане создает очень богатый контекст: здесь есть место для соревнований, очевидной становится необходимость десятичной системы счисления, серьезно встает вопрос об объективном существовании количества, повторяемости эксперимента и его независимости от наблюдателя, актуальность приобретают проблема повышения надежности вычислений при ненадежности устройств и проблема разделения труда. Экспериментальным может быть подход и к такому незыблемому бастиону традиционной педагогики, как таблица умножения. Опыт показывает, что самостоятельное изготовление этой таблицы ребенком, который умеет добавлять к двузначному числу однозначное с небольшой скоростью и средней надежностью, или хотя бы просто умеет считать до ста, занимает пару часов. Стоит ли эту пару часов тратить? Нам представляется, что стоит. Вместо директивы, выданной сверху, мы получаем результат собственного эксперимента, который при необходимости можно повторить. Разумеется, и запоминание таблицы в ходе ее изготовления и дальнейшего использования идет безболезненнее и требует меньше времени. Таблицу сложения мы тоже получаем экспериментально, прикладывая друг к другу полоски клетчатой бумаги и считая клетки (конечно, достаточно уметь считать только до 20). В крайнем случае можно измерять сумму счетной линейкой, но это годится только для самых ленивых, хотя тоже — эксперимент. Исследовательской темой является и построение модели образования числительных в разных языках, и склонения существительных.

Графическая грамотность. Использование значительного объема графического материала, как нам представляется, помимо внутренних целей курса содействует реализации и более широкой программы повышения графической грамотности учащихся, их способности к восприятию информации не только в форме линейных тестов и цифр, но и в форме таблиц, диаграмм.

Арифметика, алгебра и комбинаторика. Выше мы уже привели пример, как использование образа мешка объясняет смысл скобок. Для мешков естественно определяются операции суммы, максимума и минимума, произведения. С помощью этих операций школьная арифметика, алгебра и комбинаторика приобретают наглядный смысл.

Прикладная математика. Школьные текстовые задачи оставляют определенный простор для анализа текста и формирования его модели. В этом смысле показателен тезис, на котором настаивают многие учителя математики, о необходимости длительного решения задач «арифметическим способом» до перехода к алгебраическому. Вероятно, надо развивать, с одной стороны, языковой аспект текстовых задач, с другой — исходить из задач реального мира, которые сами учащиеся описывают текстами и математическими моделями.

Нестандартные задачи. Одна и та же задача может играть в ходе изучения математики и вполне творческую роль, и вполне заученно алгоритмическую. Например, можно решать задачу о том, как используя два кувшина такой-то и такой-то емкости, отлить столько-то литров, путем эксперимента, нащупывания решения. Можно знать общую «теорию» переливания и применить ее в конкретном случае. Можно, наконец, заучить наизусть алгоритм, не понимая, откуда «он взялся», и выписывать по нему последовательность действий. Последнее умение само по себе выглядит довольно бессмысленным, хотя исходный класс задач интересен.

Правила. Многие школьные правила вроде «Чтобы найти целое по его части…» пытаются заменить свободный поиск решения заученным рецептом, и (возможно, хотя далеко не для всех учащихся) повышая результативность в решении задач определенного типа, действуют против наиболее важных целей математического образования. Выучивание этих правил вредит не менее, чем заучивание, без понимания, теоретико-множественных определений. (Однако последние определения хотя бы имеют общематематический смысл, в отличие от школьных правил.)

Контекст. Историко-культурная перспектива. В отличие от заучиваемых, «висящих в пустоте» правил, привлечение максимально широкого контекста, в том числе культурно-исторического (например, в освоении геометрии), мы считаем принципиально важным.

Реализация

Радикальность. С одной стороны, предлагаемая информатическая математика — это не так уж и много (какие-то картинки). Один уважаемый педагог даже сказал, что в школу это не пойдет, поскольку этим дети занимаются в детском саду (есть у нас и такой опыт, но это отдельный разговор). С другой стороны, по радикальности (к сожалению) — это можно считать слишком серьезным, а потому нежизненным.

Существующая в начальной школе математика. Работая над курсом и опробуя его в школе, мы стали более тщательно знакомиться с тем, что там происходит, и обнаружили, что привлекаемые нами понятия во многом используются не только в любом традиционном преподавании, но и намного чаще — в современной начальной школе. Задачи, включающие в свою формулировку цепочки и мешки (обычно их так не называя), занимают существенную часть программы первого класса. Этого времени с лихвой хватило бы на фундамент нашего курса. Однако задачи эти, во-первых, даются без ясной системы определений (мы определения понятий даем, но на наглядных примерах); во-вторых, эти задачи «повисают в воздухе», поскольку в дальнейшем школьном образовании непосредственно не используются; в-третьих, особенностью многих из этих задач является «произвол» автора относительно того, что считать решением, а что — нет. Типичны в этом отношении задачи, где требуется из пяти объектов выделить один лишний. Учитель знает, что ответ один, и даже может во многих случаях его угадать. Но что ему делать с учащимся, который рассуждал *по-другому*? Самое простое — объяснить, где у него *«ошибка»*, а если он и дальше будет думать по-другому, принять соответствующие меры.

Прецеденты информатической математики в начальной школе. Через некоторое время оказалось, что и во введении в начальную школу информатической математики мы не одиноки. Появилась серия учебников, например (Горячев и др., 2003), где понятий было еще больше, правда подход там был несколько иной: ясное понимание системы понятий и операций там не ставилось во главу угла. Впрочем, и на уровне мировой практики абсолютной новизны здесь не было. Утраченная в силу материальных причин практика использования в начальной школе наглядных объектов развивается во всем мире, работа с наглядными объектами информатической математики представлена, например, переведенными на русский язык книгами (Варга, 1978[a]; Варга 1978[b]). Замечательная попытка ввести детей в мир графических объектов и логики предпринята в учебном пособии (Папи, Папи, 1974).

Наконец, использование нашего курса в сотнях школ, к нашему удивлению, показало, что проблемы с восприятием материала учителем и учащимися не возникало. Он воспринимался именно как наглядный, развивающий, игровой. Экспериментальные проекты, включающие работу с телесными объектами, ножницами и клеем, групповая деятельность использовались учителем для разгрузки учащихся, погруженных в «тексто-центричное» образование. Отличие курса от других вариантов информатической математики ясно осознавалось учителями. Большие трудности вызывала педагогическая перестройка: бЈльшая самостоятельность учащегося, отсутствие домашних заданий.

Курс информатики для начальной школы часто называют «пропедевтический». Мы не возражаем против этого термина и понимаем его следующим образом: в этом курсе почти не дается формальных определений, все понятия вводятся на примерах; школьник приобретает там на материале подходящей сложности опыт работы с объектами информатики, идущей по четким и ясным правилам. (На самом деле он приобретает и опыт понимания определений.)

На этом мы завершаем первую часть статьи. Во второй будет описано построение как намеченного выше курса информатической математики, так и объемлющего математического курса для средней школы.

Литература

Варга Т. Математика: Ч. 1. Блок-схемы, перфокарты, вероятности: математические игры и опыты. М., 1978[a].

Варга Т. Математика: Ч. 2. Плоскость и пространство, деревья и графы, комбинаторика и вероятность: математические игры и опыты. М., 1978[b].

Горячев А.В и др. Информатика в играх и задачах. 1–5 классы. Учебники-тетради. М., 2003.

Папи Ф., Папи Ж. Дети и графы. Обучение детей шестилетнего возраста математическим понятиям. М., 1974.

Семенов А.Л. и др. Алгоритмика. 5–7 классы: Учебник и задачник для общеобразовательных учебных заведений. М., 1997.

Семенов А.Л., Рудченко Т.А., Щеглова О.В. Информатика: Учебники и рабочие тетради. Книги для учителя 1–4 классов. М., 2004.

Семенов А.Л., Рудченко Т.А., Щеглова О.В. Математика и Язык. Тетради для ученика. Книги для учителя 1–2 классов. М., 1997.