А.Л. Семенов

СОВРЕМЕННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ШКОЛЕ Часть II[1]

Данная работа является продолжением публикации в предыдущем номере журнала. В ней более подробно рассматривается реализация подхода к современному математическому, или, более точно, математико-информатическому компоненту начального образования. Основные мотивировки нашего подхода были рассмотрены в первой части. Автор надеется, что обе части представляют интерес для широкого круга читателей журнала, заинтересованных в совершенствовании содержания начального образования. При этом автор и его коллеги по рассматриваемому подходу, с одной стороны, наблюдают практические доказательства его возможности и жизненности, а с другой стороны, осознают, что для его распространения в действительно массовом масштабе (например, в масштабе, сравнимом с «линией Давыдова» или «линией Занкова» по числу школ и объему времени в учебном плане) предстоит весьма значительная работа, включающая анализ полученного опыта и наработку различных типов содержательных задач.

Дальнейший текст по существу представляет собой прокомментированную учебную программу. Программные элементы выделены курсивом, комментарии даны прямым шрифтом. В тексте программы не везде соблюдено грамматическое и семантическое единство, например, где-то мы используем глагол («считать»), где-то существительное («счет»). Мы надеемся, что это содействует облегчению текста и извинительно в журнальной публикации.

Последовательность расположения материала в программе лишь частично соответствует последовательности прохождения тем в школе. Различные линии, естественно, изучаются параллельно. Арифметические действия мы сознательно передвинули на ко-

[1] Первую часть статьи А.Л. Семенова см. в № 1.

нец обсуждения, подчеркивая тем самым, что они вовсе не обязательно с самого начала составляют основу курса.

Объекты

Представляется очень важным, чтобы дети в начальной школе имели дело не с абстрактными математическими конструкциями, а с конкретными объектами, которые можно положить перед собой на стол или нарисовать на листе бумаги, можно пощупать, сконструировать или разобрать на части.

Простейшие объекты

- *Предметы (в пространстве), включая самих детей и других людей, события (как объекты математического рассмотрения)*
- *Фигурки (на бумаге)*
- *Символы (бусины). Бусины имеют свойства:*

— Форму
— Цвет
— Размер

- *Одинаковость объектов*

Простейшие объекты неделимы (мы не разбираем их на части, когда работаем с ними). Это — те кирпичики, из которых строится наш математический мир. В неинформационной части окружающего нас мира наиболее поразительным примером простейшего объекта является атом. Атомы одного вида абсолютно одинаковы. Число разных видов атомов — меньше сотни. Из них сделано все...

Особенностью рассматриваемых нами символов является их устойчивость (они не меняют цвета, не рассыпаются, не раскалываются на части и не слипаются). Их свойства «дискретны»: они могут иметь (например) шесть ясно различающихся цветов, их формы легко отличимы одна от другой, размеров у них, скажем, только три. При этом мы понимаем, что с реальными символами, например, реальных языков возможны различные казусы: например, иногда невозможно визуально различить символы, которые мы хотим считать различными. (В компьютерной практике это встречается, например, при попытке различить «с» русское и «c» латинское.) У символов имеется верх и низ. Эти трудности, как и тонкие различия (например, между дефисом и тире), обсуждаются в курсе в свое время.

Сложные, составные объекты

- *Мешки (совокупности разносортных объектов)*

Мешки предлагаются ребенку в виде реального мешка из ткани, прозрачного или непрозрачного пластика, кучи объектов на столе, изображения объектов на листе бумаги, отделенного от окружающей плоскости листа замкнутой линией. Мешки могут быть использованы вместо множеств в различных математических конструкциях. При этом они более наглядны, чем множества, более непосредственно связаны с «числовой» математикой.

— Выделение объекта из мешка, в том числе — произвольного, какого-нибудь, а также выделение из мешка объекта с данными свойствами

Выделение, (указание, «отмечание») объекта может состоять в его вынимании из мешка, в помечивании его символом на бумаге.

— Сортировка (объектов) мешка

Сортировка мешка состоит в разбиении, раскладывании, разделении его объектов на отдельные кучи (тоже мешки) так, что в каждой куче объекты одинаковы. Для решения этой задачи не требуется уметь считать. В случае нарисованного мешка кучу можно выделять, обводя одинаковые предметы новой линией или пометив их каким-то символом. Сортировка является реализацией идеи классификации, считающейся важным элементом общей, а тем более современной информатической грамотности.

— Установление соответствия между объектами двух мешков

Наиболее важным видом соответствия является такое, при котором объекту соответствует такой же (одинаковый) из другого мешка. Однако может быть и иначе: например, данному объекту может соответствовать любой или круглой бусине может соответствовать треугольная того же цвета. Соответствующие друг другу объекты можно выкладывать один против другого или соединять линией на бумаге. Задачи на установление соответствия, как и многие другие из начальных тем нашего курса, входят и в другие курсы математики. В нашем случае, однако, эти задачи приводятся в систему и занимают соответствующее им место в общей системе математического образования.

— Сравнение мешков. Одинаковость двух мешков, включенность одного мешка в другой

Понятия последних подпунктов, с одной стороны, элементарны и доступны ребенку, с другой стороны, служат основой для всей математики, с третьей, их проверка для конкретных мешков требует значительной для первоклассника или дошкольника аккуратности, настойчивости и сосредоточенности, которые мы воспитываем в курсе математики и информатики и в школе вообще.

В традиционных учебниках арифметики второй половины XX в. мешки из одинаковых элементов используются в частности для объяснения равенства и неравенства чисел. Однако наглядная линия в традиционных учебниках продолжается очень недолго, быстро заменяясь вычислительно-символической. Для нас она служит мощным средством выработки и поддержки интуитивных, наглядно-пространственных представлений о числе и о других математических понятиях. Например, «включенность», «вложенность» для мешков — это действительно «когда содержимое одного мешка уже содержится в другом».

▪ *Числа*

— Знание наизусть последовательности (цепочки) символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то есть умение их выписывать и произносить подряд, в ответ на предъявление изображения «4» произносить «четыре» и писать «четыре»

Арифметическая грамотность не обязана следовать за букварной грамотностью, она может развиваться параллельно с ней или опережать ее; цифры не обязательно писать рукой — можно их набирать на компьютере или калькуляторе. Выучивание чего-то наизусть нужно вести не как отдельную деятельность, а попутно с применением этого знания, в данном случае параллельно со счетом.

— Пересчет объектов числом до 100 с параллельным называнием номера («пятый») или количества («пять»), выкладыванием и отмечанием на счетной (числовой) линейке, откладыванием на счетах. (Числовая линейка — это полоска, например, пластика, на которой выписаны последовательные натуральные числа от 1 до 20 или до 100, и рядом есть клетки, куда можно ставить пометку или класть небольшой предмет.) Подсчет объектов, лежащих на столе, нарисованных на бумаге, клеток в полоске или в плоской клеточной фигуре, подсчет числа областей в рисунке, подсчет появляющихся объектов, световых и звуковых сигналов. Выделение, выкладывание, создание, порождение объектов в заданном количестве

При этом считать, например, число предметов в пределах двадцати можно и не зная названия и последовательность чисел, при помощи числовой линейки — отмечая результат подсчета выкладыванием предметов в клетки линейки, или сдвигом фишки, или пометкой.

— Называние и выписывание последовательно натуральных чисел до тысячи. Умение применять к каждому числу (в десятичной записи) алгоритм «прибавления 1». Этот алгоритм осваивается на примерах и пояснениях, его формулировка не выучивается наизусть. Задача формулирования этого алгоритма детьми, устного и письменного, решается позднее. Умение называть записанное натуральное число и записывать его название для чисел, меньших, чем 10^9. Для чисел, больших 10^9, называть их, называя цифры подряд. Умение пересчитывать (устно и письменно, отмечая на линейках и таблицах) события, происходящие во времени, и предметы, расположенные в пространстве, с определенной степенью надежности. Умение правильно пользоваться порядковыми и количественными числительными

— Подсчет объектов числом до 10 000. Постоянство и объективность количества. Проверка подсчета. Оценка количества

Числа, представляющиеся основой школьной математики, используются там сегодня наиболее удобным для учителя, но далеко не самым разумным с точки зрения и развития ребенка, и социальной практики образом. Например, важные жизненные умения — безошибочно подсчитывать сколько, а при необходимости оценивать «на глазок» количество — почти не развиваются в школе.

Кроме того, в современных учебниках задания, где числа связаны с количеством реально наблюдаемых объектов, касаются только малых количеств, их слишком быстро «проскакивают» в школе. Мы предлагаем, во-первых, рассматривать довольно большие числа, реализованные как количества реальных объектов (например, количество зерен гречки в стакане), во-вторых, рассматривать совокупности разносортных объектов (мешки) в малых и средних количествах. Однозначные, двузначные, трехзначные числа появляются постепенно, при этом они действительно реализуются как количества, результаты подсчетов, измерений.

Алгоритмы, связанные со счетом, являются важнейшими алгоритмами, осваиваемыми ребенком в начальной школе. Среди базовых имеются в частности алгоритмы с чередованием действий: отложи камешек, поставь галочку в таблице и т. д.

— Сравнение двух чисел. Максимум и минимум двух чисел и мешка чисел

Здесь максимум и минимум мешков — это тоже мешок, в котором, например, максимум считается отдельно для груш, отдельно для цифр 6 и т. д.

Заметим, как пример, что если представлять число как мешок его простых сомножителей, то Н.О.Д. и Н.О.К. соответствуют минимуму и максимуму мешков.

▪ *Цепочки (конечные последовательности)*

— Примеры цепочек: цепочка месяцев, букв в слове, цифр в числе, картинок в комиксе. Последовательное называние элементов цепочки. Последовательное конструирование (нанизывание, рисование) цепочки по последовательному называнию ее объектов. Выполнение цепочки действий. Упорядочение цепочки действий, изображенных на картинках (в комиксе)

Понятие цепочки и термины, относящиеся к цепочкам, не появляются явно в традиционном курсе математики, хотя задачи на упорядочение картинок, как и понятие, например, следующей цифры в числе (как и следующей буквы в слове), используются. Таким образом, речь здесь идет не о введении новых для начальной школы понятий, а о более тщательном изучении понятий и так используемых.

Цепочки являются базовым элементом самых различных рассмотрений информатики. В частности, информация в памяти компьютера хранится в форме цепочек, последовательность состояний вычислительного процесса — это цепочка и т. д. Цепочки — базовый объект и для математического описания человеческого языка, мышления и коммуникации.

Наше представление о цепочке предполагает то, что математики называют ассоциативностью (а в школе называют «сочетательным законом»). Цепочка событий или действий ассоциативна: АБВ — это последовательное выполнение А, затем Б, затем В, независимо от того, как мы мыслим эту последовательность: сначала выполнение АБ, а затем уже В, или выполнение А, за которым следует БВ. (Конечно, другой закон элементарной математики — коммутативность, или перестановочность,— для действий не выполняется.) В то же время мы можем ту или иную цепочку заключить в бусину и эту бусину использовать для построения других цепочек.

— Одинаковость цепочек (с учетом начала и конца цепочки)

— Мешок цепочки (если цепочку рассыпать — получится мешок, состоящий из ее бусин)

— Алфавитный порядок букв и слов

— Подстановка цепочки вместо данного вхождения и вместо всех вхождений символа в цепочку

— Комбинаторика. Мешки как элементы цепочек

— Произведение (раскрытие) цепочки двух мешков. Представление произведения в таблице. Произведение цепочки нескольких мешков

Раскрывая цепочку мешков, мы поступаем так же, как при раскрытии скобок в произведении многочленов: «умножаем каждое на каждое».

— Процессы — цепочки состояний

— Слияние цепочки цепочек. Помещение цепочки в бусину. Приписывание одной цепочки к другой

Если бусины цепочки — это цепочки в оболочке, то слияние — это освобождение их от оболочек.

▪ *Таблицы*

— Число элементов мешка. Одномерная таблица мешка по сортам. Двумерная таблица по двум свойствам

Хотя таблицы и появляются уже в начальной школе в традиционных курсах, но им там придается небольшое значение. Как показывают различные исследования, «табличная неграмотность», так же как и неграмотность при интерпретации графиков, является распространенным явлением. В данном курсе таблицы появляются при соединении операций пересчета и классификации. Двумерная таблица соответствует классификации по двум признакам.

■ *Деревья*

— Отношения между элементами дерева

— Пути в дереве

— Соответствие между деревьями, мешками и скобочными структурами

При таком рассмотрении все поддеревья, следующие за одной вершиной, помещаются в один мешок, отвечающей этой вершине. Концевые вершины, листья, отвечают сами себе.

— Деревья возможностей

Деревья также присутствуют в некоторых курсах для начальной школы, однако при этом обычно не вводится никакой системы понятий.

Тексты. Математический язык

■ *Утверждения (высказывания)*

— Значения утверждений: «истина», «ложь», «неизвестно»; бессмысленные утверждения

На начальных этапах изучения математики, как показывает наш опыт, двух значений для утверждений «истина» и «ложь» недостаточно. Бывает, что мы не знаем, истинно утверждение или нет, бывает, что вопрос об истинности не имеет смысла.

— Значение утверждения для данного объекта

— Поиск объекта, удовлетворяющего утверждению в данном мешке

— Построение объекта, удовлетворяющего условию

■ *Использование имен*

В школьной математике часто рассматриваются переменные и их значения; помимо этого, там встречаются еще константы и параметры. Эти ситуации и ряд других ситуаций в современной математике описываются в терминах имен и значений.

— Неформальное представление о подстановке значения вместо имени и вычислении значения получающегося выражения — в частности истинность утверждений задачи для найденного ответа к ней

■ *Связки ВСЕ и НАЙДЕТСЯ для мешков утверждений и мешков объектов*

■ *Связка НЕ*

■ *Связки ВСЕ ТАКИЕ, ЧТО..., НАЙДУТСЯ ТАКИЕ, ЧТО... Утверждения об элементах пустого множества*

■ *Равенство*

■ *Имена операций. Их использование в линейной записи перед аргументами и между аргументами*

■ *Линейная запись цепочек и мешков. Скобки, запятые. Восстановление цепочек и мешков по линейной записи*

Для нас важно представить цепочки и мешки и в их телесном воплощении, и графически — сохраняя в них графические черты реальных мешков и цепочек. При отображении этих объектов в тексте традиционно пользуются линейной записью. В этой записи элементы цепочки просто выписываются подряд, мешки при этом заменяются скобками (как бы рудиментами мешка), между элементами мешка ставятся запятые.

■ *Учебные тексты как формальные математические тексты. Представление о «правилах игры»*

— Понимание последовательно расширяющихся фрагментов математического языка, включающего в том числе числа, символы операций, символы скобок для указания порядка действий. Умение классифицировать утверждения на истинные и ложные (верные и неверные) — там, где это возможно, — в частности для утверждений, записываемых с помощью символов «=», «<», «>» между числами. Умение пользоваться свойствами коммутативности сложения и умножения и дистрибутивности, работать со знаком «минус». Частично определенные объекты, индуктивное построение объекта. Процесс пошагового доопределения функции, заданной системой уравнений

— Операции с цепочками, используемые в курсе математики при переходе к имени с тем же значением, вычисление значения имени, подстановка значения вместо имени, получение следствия из равенства

Формальные операции с алгебраическими выражениями, в том числе содержащими символы изучаемых в школе функций (тригонометрических, логарифмических и т. д.), составляют существенную часть всей деятельности, которую ведут учащиеся в курсе математики. Большинство из них — это операции по некоторому преобразованию цепочки, которые выбираются из множества (обычно бесконечного) возможных преобразований.

Действия и процессы, их описания

■ *Состояния, переходы*

Понятия состояния объекта, перехода в другое состояние (за один шаг), последовательности переходов являются для информатики еще более начальными, чем, скажем, понятие алгоритма или вычисления. В них же прослеживается и начальное, исходное различие между информатической, компьютерной математикой и классической. Классическая математика, как правило, рассматривает объекты и системы, характеризующиеся некоторым (обычно не очень большим) числом параметров, являющихся действительными числами (это, например, координаты движущегося тела в некоторой системе отсчета). Информатическая математика, как правило, рассматривает объекты и системы, состояние которых характеризуется некоторым (обычно большим) числом дискретных величин (можно считать, что эти величины принимают значения 0 или 1; эти величины, например — состояния ячеек памяти компьютера). При этом в классической математике параметры меняются непрерывно, в непрерывном времени, в информатической математике они меняются дискретно, по шагам.

▪ *Индуктивно (рекуррентно) порождаемые последовательности; периодические и другие индуктивно определяемые цепочки символов: арифметическая и геометрические прогрессии, числа Фибоначчи, сумма и произведение начального отрезка натурального ряда, двумерные итеративные сети (игра «Жизнь»)*

▪ *Дерево возможных переходов. Существование пути, приводящего к данному состоянию. Построение цепочки действий, приводящей к данному результату, путем обратного хода по дереву выбора действий*

Дерево последовательных выборов также встречается в различных учебниках и задачниках начальной школы. Выбираться могут свойства, цвет, форма, размер; отдельные элементы объекта, например, детали одежды персонажа, могут «набираться» в ходе перемещения по дереву. В нашем курсе типичной ситуацией является последовательное выписывание бусин цепочки.

▪ *Организация перебора. Перебор телесных объектов, просмотр объектов на листе бумаги, последовательное рассмотрение натуральных чисел, элементов заданного мешка или цепочки; перебор с последующей проверкой свойств. Перебор для нахождения наилучшего. Перебор действий. Многоступенчатый перебор и его изображение на дереве. Пошаговое порождение объекта последовательностью действий из дерева. Поиск наибольшего. Упорядочение мешка чисел по величине. Поиск слова в словаре*

В обычной школе перебор встречается неявно и не пользуется особым уважением. Решение уравнения «подбором», «угадыванием» считается в разных контекстах или ненаучным, или, наоборот, некоторым «высшим пилотажем». В то же время последовательный просмотр, перебор объектов, полное рассмотрение всех возможных вариантов очередного действия, шага в деятельности или принятии решений, выбор встречаются в жизни человека очень часто. При этом мы можем перебирать объекты или действия, пока не получим первый объект, удовлетворяющий данному условию, или перебирать объекты для достижения наилучшего результата. Первый случай имеет место, например, когда мы решаем «числовой ребус». Второй — например, когда мы перебираем все прямоугольники с данным периметром и целочисленными сторонами, стараясь найти среди них прямоугольник наибольшей площади.

▪ *Ошибки, проверка*

Поиск ошибки в своих вычислениях, построениях, доказательствах — чрезвычайно важное дело. Одним из принятых в школе и во взрослой деятельности способов поиска ошибки является выделение какого-то свойства, которое должно сохраняться в ходе преобразований (инварианта). Например, при решении уравнения инвариантом может быть множество его корней. Если по ходу решения появился «посторонний корень», а мы считали, что множество корней не меняется, то допущена ошибка. Ошибку можно искать, например, разделяя весь процесс решения «примерно пополам».

▪ *Выделение в задаче частей, которые можно решать параллельно и независимо и затем объединить решения*

Программы

▪ *Команды исполнителя. Состояние вычисления. Последовательность состояний, отвечающая последовательности команд*

▪ *Способы создания программ: последовательное выполнение, выбор, повторение*

▪ *Использование в программах имен для объектов и программ; оператор присваивания, изменение значения имени в ходе вычисления*

▪ *Конструирование программ на естественном и формальном языке*

Как показывает практика, для освоения основных понятий, используемых в построении программ, очень эффективно использование графических сред. Наиболее мощной из известных для начальной и средней школы является среда Робота в лабиринте, наиболее важной по накопленному методическому материалу и осмысленной с точки зрения использования ребенком — среда Черепашки.

Игры

▪ *Состояние игры. Выигрыш. Дерево игры*

Под играми мы понимаем в начальной школе игры двух противников с полной информацией (они видят поле), без элементов случайности. Типичными примерами игр в нашем понимании являются различные игры в камешки. Важность игрового подхода подчеркивалась неоднократно Я.И. Кузьминовым и Е.Ф. Сабуровым. Для нас, помимо отмечаемого ими социального смысла игр, важны и другие аспекты, в частности игровая семантика логических языков и общая схема «анализа с конца».

▪ *Стратегии. Выигрышные стратегии*

▪ *Вероятность. Равновероятность в случае симметричных переходов*

▪ *Вероятность данного результата в вероятностном дереве*

Измерения

▪ *Измерение веса и объема. Меры веса и объема. Измерение длины. Меры длины. Десятичные дроби и проценты. Числовые интервалы. Арифметические действия над интервалами*

Измерения различных величин — еще одна важная стартовая точка изучения математики и информатики, недостаточно учитываемая многими современными курсами. Задача точного измерения естественно приводит, с одной стороны, к десятичным дробям, с другой — к представлению об интервале, в котором лежит измеряемая величина (работа с такими интервалами в современной информатике соответствует представлению о «точности вычислений»).

▪ *Измерение времени. Временная ось. Стрелочные часы. Двенадцатеричные и шестидесятеричные дроби. Получасы и четверти часа. Способы указания времени в родном языке, конструкции типа: «шел третий час ночи», «на двадцать третьей минуте», «через три дня», «он работает через два дня на третий». Календарь. Названия времен года, месяцев, дней недели в разных языках. Летоисчисление. Сложение отрезков времени, вычисления типа: какой день недели будет... Таблицы расписаний*

▪ *Цепочка результатов измерения. Графики температуры, расстояния*

Арифметические операции

▪ *Ссыпание мешка мешков*

Ссыпание мешков — это просто уничтожение их оболочек и оставление всех элементов в общей оболочке мешка мешков.

▪ *Сложение полосок (прямоугольников ширины 1 см)*

Сложение двух полосок сантиметровой ширины в одну более длинную — один из способов с высокой степенью безошибочности найти сумму двух чисел: на полосках можно выписывать числа подряд, их можно прикладывать к числовой линейке.

▪ *Суммы чисел в пределах 5. Их нахождение для мешков и полосок. Создание таблицы сложения однозначных чисел. Выделение пятерок как один из возможных алгоритмов сложения*

Традиционные курсы арифметики очень быстро сводят начальную математику к выучиванию таблиц сложения и умножения и отработке безошибочности в выполнении действий с многозначными числами. Формирование представлений о соответствующих объектах и операциях в нашем курсе идет в работе с графическими и трехмерными объектами, с малыми количествами (объектов каждого сорта). При этом таблицы сложения и умножения попадают в общий контекст «табличной грамотности», создаются учениками самостоятельно («открываются» экспериментально). Запоминаются они в ходе создания и дальнейшего использования.

▪ *Сложение двузначного и однозначного числа, двузначных чисел. Самостоятельное открытие алгоритма и составление его описания. Принятие общей договоренности о способе записи (в столбик)*

▪ *Сумма мешка чисел. Цепочка производительностей, скоростей в последовательные моменты времени. Ее представление столбчатым графиком. Нахождение работы и пути как суммы столбцов графика, то есть суммы мешка цепочки*

В обычных курсах арифметики намного больше занимаются суммами двух слагаемых, чем суммами нескольких. Однако в реальной жизни суммы произвольного, заранее неизвестного числа слагаемых (их мешка) встречаются часто. С точки зрения современной математики и информатики эти операции также очень естественны и полезны. В нашем курсе такой подход последовательно используется не только для сложения. В частности, можно складывать и любое количество мешков. Числа первой сотни оказываются наглядно представленными мешками.

▪ *Максимум и минимум чисел в мешке, объединение и пересечение для мешков мешков*

Максимум и минимум чисел в мешке определяется естественно. Нахождение максимума и минимума для мешков из нескольких десятков чисел требует организации процесса перебора, такие процессы упоминаются дальше. Оно идет сначала для телесных (реальных) мешков, потом — для графических. Объединение мешков понимается соответственно: в нем число объектов каждого сорта — это максимум числа объектов этого сорта в объединяемых мешках. Для пересечения, естественно, используется минимум. Далее, вполне осмысленно рассмотреть мешки, элементами которых также являются мешки, то есть мешки мешков. Для мешка мешков, скажем, Z естественно определяется мешок, являющийся максимумом (объединением) всех мешков, лежащих в Z.

▪ *Координатные полоски и плоскости. Перемещения*

Перемещения вперед и назад по клетчатой бумаге воспринимаются детьми легко. Для перемещения на одну клетку можно использовать стрелки, для перемещения на несколько клеток — стрелку с числом или знаки «+» и «-» с числом. Это может быть первой встречей с этими знаками для детей в курсе. Для обозначения перемещений по плоскости нужны еще стрелки вверх и вниз. Координаты на прямой и плоскости вводятся для клеток, а не для точек, но можно их вводить и иначе.

▪ *Площадь прямоугольника. Создание таблицы умножения однозначных чисел*

Площадь прямоугольника на клетчатой бумаге — это число клеток в нем. Подсчет числа этих клеток, например, с выписыванием их порядковых номеров — экспериментальный проект, позволяющий каждому ребенку открыть таблицу умножения. Геометрические объекты вводятся на клетчатой бумаге и постоянно используются для развития числовой интуиции и навыков. С другой стороны, дискретность, «клетчатость» изображения — характерная черта современных информационных технологий (которые становятся все более «цифровыми»).

▪ *Умножение двузначного числа на однозначное. Самостоятельное открытие алгоритма, принятие договоренности о форме записи, исходящей из возможности выполнить операции над однозначными числами (знания таблицы умножения). Умножение трехзначного числа на однозначное*

▪ *Таблица цен и таблица весов сортов объектов. Цена мешка, вес мешка (скалярное произведение)*

▪ *Признаки делимости на 2 и на 3, затем — на 4 и на 9*

▪ *Наглядное представление чисел, обратных к целым, как долей единицы, их запись с помощью знака дроби, их умножение на натуральное число и запись результата в виде дроби, равенство дробей, получаемых умножением и делением числителя и знаменателя на одно число*

▪ *Площади прямоугольных треугольников на клетчатой бумаге. Площади произвольных многоугольников с целыми вершинами. Интервалы, в которых лежит площадь произвольной фигуры. Дискретизация плоского изображения*

▪ *Площади произвольных треугольников, образованных прямыми, проходящими через целые точки. Рациональные числа*

▪ *Наглядное представление отрицательных чисел как точек на числовой линейке, как действий сдвига*

Среда деятельности

Мы считаем очень важным для российской начальной школы возвращение к существовавшей в советской школе богатой материальной среде начальной школы и обогащение ее достижениями мировой школы. В эту среду входят manipulatives — телесные, ощутимые объекты для учебной деятельности.

— Необходимы телесные и графические представления математических объектов, на которых осуществляются отношения и действия, в том числе:

▪ простейшие объекты — для складывания в мешок, счета, выкладывания в цепочку, нанизывания;

▪ для представления количества — счетные объекты, счетные линейки, пальцы рук;

- для сортировки — мешки разнородных объектов;
- для формирования цепочек символов, цифр, букв — линейки и шнуры;
- для представления количества в десятичной системе, группировки объектов десятками, для перехода между соседними разрядами — подходящие, легко группируемые счетные объекты, области на плоскости для размещения единиц разных разрядов, счетные линейки;
- для подсчета больших количеств — мешки семян растений;
- для представления десятичных дробей — счетные линейки с измельчением единиц;
- для представления дробей — круговые секторы для выкладывания любого числа 30-х и 8-х долей, с разметкой по 60-м и 120-м;
- для представления отрицательных чисел — числовая линейка;
- для измерения и счета:

— считаемые и измеряемые объекты: зерна, пуговицы, бусины с символами, кубики ЛЕГО,

— мерные инструменты — счетные линейки, весы, цифровые и стрелочные часы, измерительные линейки, кружки.

- Еще одной возможной средой деятельности является экранный (виртуальный) мир. Он обладает недостатком большей отдаленности и отделенности, чем телесный и графические миры. При этом у него имеются и некоторые свойства, которые могут оказаться полезными:

— Математические объекты, и статические, и процессы, в нем легко строятся и модифицируются. Это служит основой для развития экспериментального освоения математики.

— Наглядно демонстрируется эффект, результат того или иного действия. Например, можно увидеть несоответствие результата ожидаемому или просто получить информацию об ошибочности ответа.

— На компьютер можно переложить какую-то часть работы и сосредоточиться на важном в данный момент обучения.

— Компьютер может «подсказывать» очередной ход.

Эти же модели используются для выполнения операций над числами. В некоторых случаях, но не всегда, они работают параллельно или заменяются графическими моделями. В частности, выкладывание на столе двух групп предметов и их объединение, последовательное загибание или отгибание пальцев, прикладывание двух столбиков, перемещение по числовой оси — для сложения; выкладывание определенного числа рядов по столько-то предметов, рисование и подсчет клеток прямоугольной таблицы, многократное сложение — для умножения; отбирание предметов — для вычитания, многократное отбирание — для деления (с остатком).

Эти модели используются для определения указанных действий на примерах и общего их описания, к ним учащийся умеет обращаться при необходимости проверить свои действия, осуществляемые иным образом (например, с помощью выученной таблицы умножения). Учащийся использует эти модели для получения любых данных таблиц сложения и умножения, если он что-то забыл или не уверен в своей памяти.

Результаты обучения математике в начальной школе

Выделим результаты обучения учеников начальной школы, относящиеся к традиционной области арифметических навыков и умений. Они таковы.

— Умение выполнять арифметические действия с целыми числами и десятичными дробями. Знание наизусть: таблицы сложения однозначных чисел, таблицы умножения однозначных чисел, таблицы квадратов чисел до 20. Необходимо задать параметры для выполнения арифметических операций учащимся тремя способами: в уме, с помощью ручки и бумаги, с помощью калькулятора. В параметры входят: скорость и надежность для различных классов чисел в зависимости от класса обучения и выставляемой отметки. Например, можно предлагать выполнить в уме, исходя из предъявленного в письменной форме условия:

А) сложение:

- *двух двузначных,*
- *трех-четырех однозначных чисел;*

Б) умножение и деление с остатком:

- *двузначного числа на однозначное.*

В письменной форме нужно уметь:

А) складывать:

- *два четырехзначных числа (дальнейшее повышение разрядности не приводит к существенному росту сложности, поэтому его можно и допустить; четыре разряда встречаются в реальных задачах);*
- *пять трехзначных чисел;*

Б) умножать и делить:

- *трехзначное число на двузначное.*

В области **арифметики рациональных чисел** можно ограничиться операциями сложения и вычитания для дробей со знаменателями, являющимися делителями 120-ти.

Типичным примером **задачи**, которую было бы желательно решать выпускнику начальной школы, является следующая: «Надо купить два батона по 13 коп., полбуханки бородинского по 22 коп., 6 рогаликов по 3 коп., два кекса по 18 коп. и 300 г. голландского сыра по два шестьдесят. Сколько нужно денег? (И, если сразу точно сказать трудно, то хватит ли двух рублей или нужно три?)» Следующий пример: «Компания покупает холодильники по 900 руб., а продает по 1000. Какова торговая наценка компании и сколько она составляет в процентах (приблизительно, если нельзя точно)?» (Возможны и более сложные задачи на проценты, связанные с ростом капитала в банке, налогами и т. д.) Имеется класс задач, связанных с измерением времени, например: «Поезд выходит в 23.57 и идет семь с половиной часов. Во сколько он приходит?» — а также с часовыми поясами, подсчетом отпуска и т. д. Следующий класс задач: «Ежедневно ты тратишь примерно 300 руб. Сколько примерно потратишь за месяц?» К ним примыкают обратные задачи: «Тебе нужно скопить 1000 руб. Ежедневно ты можешь откладывать 12 руб. и т. д.». Таким образом, эти задачи требуют соотносить с реальной ситуацией некоторые арифметические выражения, в которые подставляются числовые параметры, взятые из ситуации. Возможна также последовательность вычисления числовых выражений, где результаты предыдущего вычисления используются в последующих.

Принципиально иная природа у задач, в которых требуется найти объект, удовлетворяющий некоторому условию (как правило, представляющему собой требование одновременного выполнения нескольких более просто формулируемых условий), но при этом из условия явно не вытекает последовательность действий по нахождению ответа. Таких задач достаточно среди так называемых «текстовых задач» основной школы. Существенное место они занимают и среди наших задач, относящихся к комбинаторным объектам. Например, условия на построение цепочки могут выглядеть так: «перед каждой синей бусиной идет желтая» или «всего в цепочке три квадратных бусины». Возможны, например, такие задания: «Из какого начального состояния мог начинаться путь робота, выполняющего такую-то программу и закончившего ее выполнение там-то». Одним из естественно напрашивающихся и житейски оправданных способов является поиск ответа наугад, то есть перебор и проверка всех возможных кандидатов. Этот важный способ находится сегодня на периферии школьного образования и упоминается при занятиях с продвинутыми детьми. В то же время, его важность для математики и жизни несомненна. К задачам рассмотренного плана относятся уравнения, многие текстовые задачи и задачи с комбинаторными объектами. Поэтому мы и считаем деятельность «переборного типа» важной частью всего содержания образования.

Отдельная тема, вырастающая из нашего подхода,— это использование построенного в курсе аппарата при рассмотрении лингвистических явлений: образование числительных, склонение, спряжение в различных языках.

Наконец, еще одна принципиальная тема, остающаяся вне рамок настоящей публикации, — это содержание математического образования для основной и старшей школы. Мы не предлагаем существенно дополнять это содержание элементами дискретной математики и информатики, хотя большее внимание к проблемам языка и вычислительной практики необходимо. Автор намеревается продолжить обсуждение этой темы, в частности в связи с актуальными проблемами реализации образовательных стандартов и совершенствования системы аттестации.