



Ю.И. Журавлев

# ФУНДАМЕНТАЛЬНО- МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ОБЩЕКУЛЬТУРНЫЙ АСПЕКТЫ ШКОЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ

## Аннотация

Информатика, появившаяся в российских школьных программах двадцать лет назад, остается наиболее изменчивой образовательной областью. В статье рассматривается математический компонент школьной информатики в сегодняшнем состоянии, историческом развитии и ближайшей перспективе и обосновывается его фундаментальная важность как части российского школьного образования.

## Введение

Последние десятилетия в российской математике активно обсуждается вопрос о содержании школьного математического образования. При этом главная проблема: как сохранить то, что входило в «школьную программу» пятьдесят (или сто) лет назад. Но недостаточно рассматривается вопрос о том, что должно быть введено нового в содержание школьного математического образования. Вопрос этот, однако, представляется ключевым. Содержание математического знания принципиально изменилось за последние сто лет. Особенно значительным это изменение (и его влияние на цивилизацию) стало благодаря информационным и коммуникационным технологиям. Это изменение нашло отражение и в школьных программах различных стран, но, в общем — небольшое. Школьное образование — это достаточно консервативный социальный механизм. В определенной степени исключением явилось российское образование. В нем новое содержание математического образования проявилось, однако не непосредственно в курсе математики, а в курсе информатики, сразу при его введении в школу. Связано это было, вероятно, с тем, что школьной информатикой занимались настоящие математики. Авторами первого массового учебника по информатике стали А.П. Ершов, А.Г. Кушниренко, Г.В. Лебедев, А.Л. Семенов и А.Х. Шень.

Наличие математического содержания вне школьного курса математики не является чем-то необычным. Например, основное



содержание **прикладной математики** (включая анализ данных, построение моделей, вычисление) в школе обычно дается в курсе **физики**. Однако это должно происходить более осознанно, например, векторы или тригонометрические функции должны в курсах математики и физики даваться согласованно.

А.П. Ершов, однако, выступил с лозунгом «Программирование — вторая грамотность», претендующим на большее, чем просто добавление еще одного раздела в курс математики. Для него культура алгоритмического мышления, к которой относится, например, умение разбить задачу на подзадачи и потом соединить решения подзадач, или общее умение составить и понять инструкцию, является важнейшей частью **общей культуры**, ее базы — грамотности. При этом слово «программирование» в лозунге Ершова апеллировало скорее не буквально к программированию для тогдашних компьютеров, а к следующим измерениям: алгоритмическое мышление как специальный вид математического, алгоритмическое мышление в общежитейском и общечеловеческом контексте, свободное использование всего информационно-технологического контекста современной цивилизации.

Итак, в содержание российского школьного математического образования 20 лет назад были введены принципиально новые разделы. Их актуальность сегодня увеличилось. В рамках формируемых сегодня стандартов и программ общего образования необходимо принять решение: сократим ли мы элементы современной дискретной, компьютерной математики в школе, или будем их последовательно развивать и расширять? При этом вопрос о том, войдут ли эти элементы в курс математики или в курс информатики, является хотя и практически важным, но на нашем уровне рассмотрения второстепенным.

Думается, что правильным ответом на заданный вопрос является второй, что именно **развитие и расширение основ компьютерной (информатической) математики должно стать основным направлением развития математического образования в нашей школе в ближайшие годы**. Во втором разделе настоящей статьи мы коснемся истории данного направления в нашей стране и покажем, что значительный путь в этом отношении пройден, сформирована учебно-методическая база и образовательная традиция. В третьем разделе более подробно остановимся на содержании информатической математики, прежде всего — на школьном уровне, и ее связях с другими областями. Мы подчеркиваем фундаментальное, математическое, философское и общекультурное значение математических результатов информатики. Мы коротко охарактеризуем те из них, которые, с одной стороны, представляются нам наиболее важными, с другой — доступными для старшеклассников. Тем самым, представляется безусловно оправданным их включение в обязательный минимум образования для учащихся, выбравших информатику как профильную дисциплину, а в дальнейшем и в минимум образования для всех школьников.



Разумеется, введение чего-то нового в школьные курсы, как правило, должно указывать и направления их разгрузки. В нашем случае ситуация выглядит несколько более благоприятной, чем в других случаях: математическое содержание вводится в часах другой дисциплины. Тем не менее этого недостаточно. Особенно важным нам представляется, что более активное, чем до сих пор, использование информационных технологий может дать возможность для разгрузки курса математики. По крайней мере, в ближайшей перспективе речь может идти о разгрузке за счет использования ИКТ (калькулятора и т. д.) для учащихся, которым не удастся освоить существующий курс математики.

Прежде чем более детально остановится на проблеме содержания, о котором идет речь, полезно представить основные вехи предистории российской школьной информатики и роль математики и российских математиков в ней.

— 1940—1950 годы. Программирование как математическое дело (А.А. Марков, А.А. Ляпунов);

— 1960-е годы. Программирование как предпрофессиональное и развивающее в физико-математических школах, созданных в СССР в 1963 году (А. С. Кронрод, Г. М. Адельсон-Вельский и ИТЭФ, А.А. Ляпунов, С.И. Шварцбург). Функции программирования в школе:

- иная математика (аспект, имеющий принципиальную важность в контексте данной работы);

- знакомство с будущей профессией и подготовка к ней в период бурного роста информационной индустрии (в том числе — в составе военно-промышленного комплекса), профессионального образования в области информатики и низкого уровня знакомства населения с информационными технологиями;

- реализация исследовательского и проектного подхода.

— 1970-е годы. Школы юных программистов, олимпиады по программированию (А.П. Ершов). Функции программирования для детей вне школы: общеразвивающая, мотивирующая.

— 1981 год. Программирование — вторая грамотность (А.П. Ершов, доклад на конгрессе ИФИП). Основные положения:

- универсальность понятий программы, ее исполнения, процессов переработки информации в природе и обществе. Существование этих понятий и их базовая роль в жизни человека и ребенка до и независимо от современных электронных технологий;

- алгоритмическое мышление как часть всеобщей грамотности;

- алгоритмическое мышление как исправляющее перекос образования в направлении пассивного знания, поддерживающее деятельностную жизненную позицию и педагогику. Важность раннего обучения алгоритмическому мышлению. Соединение деятельностной педагогики и информационной технологии в педагогических экспериментах С. Паперта;

- принципиальность математического аспекта программирования.



— 1980-е годы. Школьные системы для обучения алгоритмическому мышлению (А.П. Ершов, Г.А. Звенигородский, Ю.А. Первин). Раннее обучение алгоритмизации, визуализация алгоритмических процессов. Математическая ясность алгоритмических конструкций.

— 1985 год. Перемещение центра активности из Новосибирска в Москву. Первый массовый учебник по информатике и вычислительной технике созданный специалистами из АН СССР и МГУ (коллектив А.П. Ершова). Алгоритмизация в учебнике не зависящая от уровня компьютерной поддержки.

— Попытки предложить рассмотрение абстрактных вычислительных моделей (машины Тьюринга, Поста) школьникам (В.А. Успенский, А.Б. Сосинский).

— Конец 1980-х, начало 1990-х годов:

- формирование спектра содержания информатической математики для всех ступеней образования:

- начальная школа (М.К. Звонкин, А.Л. Семенов и др.);

- основная школа (С.К. Ландо и др.);

- старшая школа с углубленным изучением математики (А.Х. Шень);

- старшая школа, университет (А.Г. Кушниренко, Г.В. Лебедев и др.);

- широкое распространение сред визуализации алгоритмических процессов на персональных компьютерах используемых в стране моделей (А.Г. Кушниренко, Ю.А. Первин, С.Ф. Сопрунов).

Таким образом, к концу 1990-х годов в России было в основном сформировано содержание образования, учебная литература и даже визуальные среды (микромиры) компьютерной поддержки учебного процесса школьной **математической информатики**. Во многом это было сделано благодаря усилиям отечественных **математиков**.

С тех пор, однако, наблюдается медленно идущий **регресс**. Связано это с конкретными историческими причинами:

- перемещение центра тяжести разработок учебной литературы в области информатики от коллективов математиков в профессиональное педагогическое сообщество, в том числе — в РАО;

- рост важности информационных технологий в обществе, насыщение образования компьютерами, актуальность их освоения;

- финансовый кризис конца 1990-х годов, «выбивший» из данной области коллективы и отдельных специалистов, которым ранее удавалось совмещать работу в учебной информатике с другими видами деятельности.

В XX веке математика начала формальное изучение **человеческого мышления и языка**. Прежде всего это изучение коснулось математического языка и математического мышления. Математики попытались выяснить законы своих собственных построений. Несколько позднее в математике возникли вопросы о математическом описании формализованной (скажем, вычислительной) **деятельности**. Фундаментальные ответы на все эти вопросы были получены

Современная информатическая математика и ее элементы в школе



в 1930-е годы. Естественно, на вопросы такой общности и глубины редко можно дать окончательные ответы. Но, с одной стороны, уже полученные ответы коренным образом изменили наше представление обо всем спектре перечисленных вопросов, с другой стороны, и сами ответы, и развитая в ходе их получения система понятий и техник легли в основу начавшей развиваться практической и теоретической информатики.

В последующие годы исследования, начавшиеся с изучения математического языка, рассуждения и деятельности продолжились в попытках математиков охватить уже нематематические сферы. Были рассмотрены различные виды рассуждений, отличные от используемых в формальной математике, человеческая способность принимать решения в сложных, неформализуемых ситуациях, способность анализировать целостные образы окружающего мира, способность к перемещению в пространстве к прогнозированию. Эти исследования иногда объединяются общим термином «искусственный интеллект». Несмотря на большой временной разрыв между ожиданиями и результатами, достижения оказались достаточно впечатляющими: довольно упомянуть о компьютерах, которые играют в шахматы лучше людей, воспринимают рукописные тексты и устную человеческую речь.

Далее мы попытаемся обрисовать математическое содержание профильного школьного курса информатики так, как оно сформировалось в 1980—1990-е годы прошлого века. При этом оно лишь в малой степени было реализовано в массовой школе. Однако широко проведенная экспериментальная работа показывает, что реальных препятствий для массовой реализации нет. Необходимо, в первую очередь, ответственное принятие решений.

**Логические языки.** Курс формальной логики время от времени появляется в учебных программах различных образовательных систем. Минимумом, необходимым для изучения информатики и решения практических задач, в том числе — программистских, является представление об имени и значении, о логических формулах и их истинностном значении, при фиксированных значениях входящих в них имен, об используемых логических связках (операторах): «и», «или», «не», «для всех», «существует», «следует». Заметим, что с точки зрения современной математики и ее приложений в исследовании естественных языков и программировании можно в вышеприведенном списке опустить «и», «или».

Важность формирования логической культуры уже в школе подчеркивается в течение многих десятилетий. Однако до введения соответствующих понятий на строгом уровне дело так и не дошло. Определенную роль здесь сыграли негативные аспекты предпринятых в разных странах попыток формального, «бурбакистского» введения основ математики в школе, как системы формальных определений (т.н. *New Math*). Однако эти аспекты не должны вести к отказу от содержательных и точных рассмотрений, относящихся к логическим языкам. Боязнь «теоретико-множественной» математики



привела к тому, что во многих действующих курсах математики и в работе практических учителей используется теоретико-множественный язык, но при этом делается вид, что его «как бы и нет».

Ситуация здесь требует пересмотра. Нельзя заниматься современной математикой и не использовать современного математического языка. Но это должен быть язык реальной живой математики, а не формализм Бурбаки.

**Индуктивные определения.** Этот небольшой раздел выглядит относительно частным, однако для математических конструкций, объектов и ситуаций, возникающих в информатике, достаточно характерно описание чего-то не сразу целиком, а в форме возможности сделать еще один шаг, применить операцию. Вот примеры из общематематической практики:

- $(n+1)!$  можно получить, умножив  $n!$  на  $n+1$ ;
- можно обе части уравнения поделить на 3;
- если  $\Phi$  — формула, и  $\Pi$  — формула, то  $(\Phi*\Pi)$  — формула;
- если мы доказали, что из  $A$  следует  $B$ , а из  $B$  следует  $C$ , то из  $A$  следует  $C$ ;
- в цепочке символов за  $\Gamma$  идет  $\Delta$ , за  $\Delta$  может идти или  $\Gamma$  или  $\Sigma$ , за  $\Sigma$  может идти  $\Sigma$  или  $\Delta$ , три  $\Sigma$  не могут идти подряд;
- чтобы найти выигрышную стратегию, надо рассмотреть все возможные первые ходы и для позиции, получающейся после каждого из них, найти выигрышную стратегию;
- группа подлежащего — это подлежащее, или прилагательное, за которым идет группа подлежащего.

Для ситуаций, подобных данной, используются различные термины: «рекурсивный», «рекуррентный», «самореферентный». Соответствующие математические описания ситуации могут привлекать понятие «исчисления», «замыкания», «наименьшей неподвижной точки».

**Программа.** Понятие программы и языка программирования, наряду с конкретным практическим смыслом, получает и точное математическое содержание, прежде всего в форме конкретных языков, для которых индуктивно определяются правила построения программ и их выполнения. При этом учащийся может освоить и важнейшие конструкции, используемые в реальных языках программирования, например, присваивание или операторы структурного программирования.

**Вычислимая функция.** Общее понятие о том, что можно сделать «механически», «алгоритмически», «эффективно», «поручить компьютеру», сформировалось в математике достаточно поздно, более того, и потребность в нем была осознана только в XX веке. Замечательно, что это понятие может быть описано весьма простыми средствами. Например, описание абстрактной вычислительной машины и класса программ для нее может быть дано без всяких ссылок на реальные компьютеры и связанные с ними технологии. В курсе информатики такой подход особенно полезен, поскольку он параллельно может решать вопрос и об описании основных принципов



устройства и функционирования реальных компьютеров. Можно описать этот класс и иначе: с помощью индуктивного определения, начиная с очень простых арифметических функций и операций над ними.

**Полнота формализаций вычислимости.** Различные описания были в свое время построены исходя из различных интуитивных представлений о том, каков весь класс вычислимых функций. При этом они привели к одному понятию вычислимости! Последнее утверждение (называемое также тезисом Черча) не может быть доказано, но подтверждается всей математической и вычислительной практикой — разные компьютеры могут вычислять одно и то же семейство функций. Каким бы ни был язык программирования, на нем можно написать программу только вычислимой функции (и, как правило, любой функции).

**Универсальная вычислимая функция.** Пожалуй, важнейшим примером вычислимой функции является универсальная вычислимая функция. Это такая вычислимая функция двух аргументов, которая позволяет, фиксируя первый из них, получить любую вычислимую функцию одного аргумента. Существование такой функции интуитивно очевидно. Действительно, возьмем какой-нибудь известный нам язык программирования, включающий программы всех вычислимых функций. Мы сами, в принципе, можем применить любую программу на этом языке к любому аргументу. Но это значит, что функция двух аргументов, получающая в качестве первого аргумента программу и осуществляющая это применение, вычислима, т.е. и является примером искомой универсальной функции.

**Невычислимость.** Одним из ярчайших математических доказательств, доступных школьнику, является доказательство невозможности перенумеровать все последовательности нулей и единиц. Это доказательство называется также диагональным рассуждением Кантора. Та же идея может быть применена для доказательства невычислимости различных функций, т.е. невозможности решения некоторых задач (в том числе, достаточно просто формулируемых) с помощью компьютера даже в принципе. Используется она и в доказательстве теоремы Геделя (которое также вполне может быть изложено школьникам на факультативе) о неполноте формальных теорий.

**Время вычисления. Проблема перебора.** Естественно, что при построении даже несложных программ человек, в том числе — учащийся, сталкивается с проблемой времени работы программы, которое может оказаться столь большим для интересующих нас исходных данных, что сделает алгоритм практически бесполезным. Со временем работы программы связана и, вероятно, самая знаменитая открытая математическая проблема — проблема перебора: можно ли решить некоторые конкретные задачи не перебирая все возможные варианты ответа, а существенно быстрее. И эта относящаяся к математическим аспектам информатики проблема, может быть объяснена школьнику.

**Сложность объекта.** Наконец, к базовому кругу понятий относится и очень естественное понятие сложности информационного объекта (например текста), как длины его кратчайшего описания.



**Игры.** Классическое понятие вычислений предполагало вычислителя, не взаимодействующего со средой. Простейшей альтернативой этому является игра двух участников с полной информацией. Анализ дерева игры, определение выигрышной стратегии, безусловно, относится к базовым вопросам информатической математики, доступным школьникам.

**Отдельные математические алгоритмы и структуры данных.**

Наряду с очерченным выше содержанием, к математическим вопросам информатики можно отнести и построение конкретных алгоритмов, которое целесообразно провести всем школьникам, обучающимся по профильной программе. К таким алгоритмам, вероятно, относятся алгоритмы: Евклида, перевода из десятичной системы в двоичную и обратно, разложения на простые множители, сортировки, обхода дерева. Естественно, необходимо дать освоить (в решении задач) математические определения и основных абстрактных объектов информатики. Это: цепочки (конечные последовательности), деревья, списки, графы, матрицы (массивы). Вопрос о порядке рассмотрения всех перечисленных вопросов и их синхронизации с другими вопросами курса информатики, например, освоением информационных технологий, будет решаться уже при составлении конкретных программ и их реализации в школьных курсах.

Описанное выше математическое содержание школьного курса информатики может быть изложено доступным школьнику языком на двух десятках страниц (вместе с задачами). В профильном курсе информатики на него отводится около 50 часов. Однако за это время школьники получают принципиально новое понимание современного «компьютерного» мира, которое не достигается сотнями часов содержательного применения компьютера, программирования и, тем более, компьютерных игр.

Похоже, что на долю информатики в школе выпадает сейчас общекультурная роль, выходящая за чисто математическую. В частности, современный человек должен пользоваться понятиями: «объект и его состояние», «переход в новое состояние», «взаимодействие между объектами», «сигнал», «система», «компонент, элемент системы» и т.д. Рассмотрение ситуации информационного взаимодействия элементов системы, т.е. взаимодействия, при котором эти элементы обмениваются сигналами, особенно в ситуации управления, послужило основой для возникновения в середине XX века целого научного направления — кибернетики (основной создатель его — известный математик Н. Винер). Понятия «управление», «обратная связь» в наиболее общем понимании также сегодня относятся к общекультурному багажу. Однако ни одно из завышенных слов данного абзаца не разъясняется в «обычных» школьных предметах (математика, русский язык, физика, биология, обществоведение и т.д.), хотя иногда там и используются. Среди представителей педагогической науки важность введения соответствующих понятий в школьный курс хорошо понимал В.С. Леднев, однако его идеи до массовой школы не дошли.

Роль информатической математики в школе

Общекультурная роль базовых понятий информатики





На этом список важнейших общекультурных понятий не завершается, достаточно упомянуть, например, понятие «классификация».

Один из бестселлеров современного информационного общества — книга «Being Digital» Никласа Негропonte в своем названии отразила процесс «оцифровки» окружающего мира и нас самих и общекультурное осмысление этого процесса. Информатика рассматривает общую ситуацию перехода от объектов реального мира к их дискретным информационным образам, «дискретизацию» непрерывных математических объектов, возникновение глобального поведения, задаваемого локальными правилами (на школьном уровне это реализуется, например, игрой «Жизнь»).

«Задачность»,  
деятельностный  
характер учеб-  
ного процесса,  
возникающий при  
математизации

---

Перечисленные выше элементы современной культуры можно донести в «чисто информирующей» форме временами увлекательного рассказа. Однако среди важнейших традиций российского математического образования имеется его деятельностный, «задачный» характер. Мы заставляем эту традицию работать, предлагая детям систему задач, в которой математические модели всех перечисленных выше понятий, идей, концепций осваиваются в ходе активной деятельности учащегося.

Оказывается, для многих из этих понятий может быть сформулирован широкий спектр задач — от простейших до исследовательских, позволяющий не ограничиваться ужасающих многих математиков, да и вообще разумных людей, заданиями типа: «выбери из четырех: компьютер — это: 1. машинка для игр. 2. важнейшее достижение современной цивилизации...». Задачи могут быть вполне «человеческими», в то же время в их решении может быть использован компьютер (но можно обойтись и без него). Для специалистов заметим, что эти задачи могут поставляться, например, так называемой теорией конечных автоматов, затем — теорией клеточных автоматов и т.д.

Заключение

---

Итак, в ближайшие годы нам предстоит сделать ответственный выбор, относящийся к тому, будет ли математическое образование в нашей стране модернизировано в направлении приближения к основному вектору развития чистой и прикладной математики, или мы постараемся на какое-то время сохранить это содержание неизменным, а за информатикой в школе оставим лишь роль введения в прикладную компьютерную технологию и информирование о современной информационной цивилизации и важности информационных процессов. Думаю, многие активно работающие специалисты в области математики, прикладной математики и информатики предпочтут первое. Нам представляется, что первый вариант предпочтителен и с точки зрения сохранения позиции России как технологической сверхдержавы.