Г.Б. Шабат

«ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА» И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Аннотация

В статье рассматриваются возможности, которые дает компьютер с точки зрения кардинального обновления школьного математического образования на основе математического эксперимента.

Введение

Чему и зачем мы учим? Стандартные ответы типа *мы учим математике для развития логического мышления* неудовлетворительны. *Логическое мышление* определено не очень хорошо. В представлении большинства родителей младшеклассников понятие логического мышления связывается с умением решать задачи весьма специального вида: «на смекалку» и т.п. Старшие обучающиеся математике часто искренне надеются на то, что эти занятия научат их *правильно думать* (автору встречались многие такие обучаемые среди студентов-гуманитариев). При этом они довольно плохо понимают, идет ли речь о развитии специфического мышления, требуемого при работе с математическими вопросами, или какого-то общего, которое поможет решать жизненные проблемы. Само понятие *математика* в сознании школьного учителя радикально отличается от этого понятия в сознании вузовского преподавателя и еще более радикально — в сознании математика-профессионала.

Как хорошо известно, современная педагогика претендует на значительно большее, чем обучение решению задач[1] весьма специального вида: математика *ум в порядок приводит*, приучает к дедуктивному мышлению и т.п. Все это было бы замечательно, если бы было правдой.

Гораздо реалистичнее был бы безрадостный ответ: *учим содержанию программ, которые кто-то составляет и спускает нам с целью успешной сдачи нашими учениками экзаменов по этим программам*. Ответ правдив, но печален: неужели за тысячи лет развития и математики, и технологий ее преподавания мы, преподаватели математики, не нашли ответа, который оставлял бы ощущение большей осмысленности нашей работы?

Личный ответ автора, являющегося и преподавателем-практиком, и математиком-профессионалом, таков.

[1] В последние годы — скорее выбору правильного ответа из нескольких…

Математика — замечательная наука и, кого бы мы ей не обучали, наша главная цель — убедить в этом обучаемых. Преподаватель математики, который не любит математику, профессионально непригоден независимо от педагогического стажа, разрядов и наград. Однако передать наши чувства к математике невозможно, лишь предоставив обучаемому возможность наблюдать за *чужими* рассуждениями и действиями — даже восхищенно, как за танцами Майи Плисецкой (*я все равно так никогда не смогу*...); недостаточно также ограничиться обучением действиям *по образцу*, непонятным и неинтересным. Необходимо помочь каждому учащемуся построить **собственные отношения с математикой**, честные, осмысленные и приносящие радость; в рамках этих отношений он должен научиться что-то **делать,** что-то **понимать** и что-то **формулировать**. На мой взгляд, добиться этого можно в рамках *любой* программы — в математике нет пустых разделов; а вот плохие программы, конечно, есть. Например, во многих программах акценты смещены с ключевых идей раздела на *решения задач*, часто искусственных и неинтересных. В работе ответственного преподавателя в рамках таких программ его задача — восстановить ключевые идеи, выделить их из массы второстепенных деталей, формул и задач. Затем надо принять главные решения (не обязательно все и сразу; часть может быть принята в процессе обучения): на основе каких действий какие учащиеся могут быть приобщены к каким из ключевых идей. Обычно наиболее подходящие действия для широких слоев учащихся связаны с *наблюдениями* и *математическими экспериментами*, как правило, компьютерными. Обсуждению таких возможностей, в основном в рамках школьной планиметрии, и посвящена настоящая статья.

Декларации и наблюдаемые явления. В вопросах о том, чему удалось научить выпускника, прошедшего полный курс школьной математики, декларации и мифы радикально расходятся с наблюдаемыми явлениями — даже если ограничиться выпускниками, получившими наивысшие баллы по математике (студенты-математики, конечно, исключаются из рассмотрения). Никаких представлений о логических рассуждениях у среднестатистического отличника нет; скорее всего, он не понимает слов *необходимо* и *достаточно*. Почти никто не может посчитать сумму

$$1+2+4+8+...+1024$$

и мало кто узнает в ней сумму геометрической прогрессии; после соответствующего напоминания практически все вспоминают обрывок формулы:

$$S_n = b_1 \frac{??}{???}$$

но обычно оказывается невозможным ни вспомнить ее, ни вывести, ни применить. Далеко не все отличают синус от косинуса, и очень многие не понимают, что такое логарифм. В целом приходится признать, что математический багаж знаний и навыков выпускника, на который реально может опираться вузовский преподаватель, в основном приобретен в начальной школе.

Об абсолютном минимуме. Абсолютный минимум требований, который следует предъявлять любому математическому образованию — это умение *понимать* хотя бы некоторые вопросы и ***проверять*** хотя бы некоторые ответы. Я хочу подчеркнуть, что не включаю в абсолютный минимум требование что-либо *решать* самостоятельно; на практике, увы, в России подавляющее количество решений списывается, заимствуется из Интернета или бездумно воспроизводится; но именно с умения хотя бы в простейших случаях *отличить истинное утверждение* (не важно, откуда взятое) *от ложного* начинаются сознательные отношения с математикой в любом возрасте. И именно математический эксперимент (а не навык сопоставления формулы со шпаргалкой, справочником и т.п.) играет особую роль в развитии этого умения.

Что и как можно исправить. Необходимо сосредоточиться на проблеме *мотивации* изучения математики. Главную проблему автор видит в том, что (в несколько упрощенной формулировке) школа на входе получает любопытного ребенка, который немножко умеет и *любит* считать, рисовать и думать, а выпускает (за исключением случая будущего математика или физика) молодого человека, разуверившегося в своих возможностях заниматься математикой, утратившего к ней всякий интерес и с большой вероятностью приобретшего к ней стойкую неприязнь.

Ссылки на умственную и душевную деградацию поколения несостоятельны; в любом случае думать надо об обучении тех детей, которые *есть*, а не каких-то идеальных, которые *могли бы* быть или *должны* быть. Представлениям о том, что хорошее образование — залог успешной карьеры и будущей счастливой жизни, и о том, что математика — основа хорошего образования, в российской действительности не суждено стать массовыми в обозримом будущем.

Следовательно, надо искать резервы повышения мотивации в *реальных интеллектуальных интересах сегодняшних реальных школьников*. И, как показывает опыт автора, положение здесь далеко не безнадежно; в соответствии с направленностью данной статьи этот тезис будет иллюстрироваться в основном на материале преподавания геометрии, хотя можно было бы рассмотреть и любые другие разделы (преподаваемой) математики. Начать надо с признания двух очевидных, легко проверяемых явлений:

- большинство школьников не любят ни решать стандартные задачи по геометрии, ни заучивать геометрические определения и доказательства; речь не об «успехах» в виде хороших отметок (в результате небольших умственных усилий по, например, подстановке чисел в готовые формулы или механического воспроизведения формулировок), а об истинном удовольствии *для себя;*
- практически все школьники очень легко осваивают среду экспериментальной геометрии (например, «Живую Геометрию») и любят работать в ней.

Затем надо трансформировать любовь школьников к *какой-то* работе на компьютере в любовь к осмысленным *геометрическим экспериментам*. И, наконец, продумывание и проведение этих экспериментов надо увязать с изучением геометрии традиционными школьными средствами. Обсуждению этих возможностей будет посвящена основная часть статьи.

О взрослой и детской математике

Единство. Переходя к содержанию образовательных математических экспериментов, следует определить их предметную область. Основная мысль заключается в том, что математика едина, и в выработке любой педагогической стратегии следует подходить к ней с обычных научных позиций.

Различия. Главное различие — в том, что в детской математике «все известно». Все корни всех уравнений находятся, все теоремы доказываются, все численные характеристики фигур вычисляются по известным формулам; во взрослой же математике, например, начатое Ньютоном вычисление длины дуги эллипса потребовало развития нескольких теорий и было завершено лишь через два века. Далее, в детской математике предписания к получению результата обычно привязаны к методам: корни квадратного уравнения нельзя просто угадать, а надо вычислить дискриминант, в геометрии нельзя использовать координаты (у этого запрета, впрочем, есть взрослый аналог: в XIX веке враждовали *аналитический* и *синтетический* подходы к геометрии) и т.д. И, наконец, более тонкое различие относится к логике: в детской математике традиционно рассматриваются так называемые *категоричные* теории — такие, в которых полная система аксиом реализуется единственной моделью, а для современной взрослой математики характерен некатегоричный подход; например, формулируются некоторые свойства числовых множеств, а затем изучаются все *числоподобные* множества.

Общие черты. Однако гораздо важнее то общее, что присуще и взрослой, и детской математике — т.е. математике вообще.

- Во всяком успешном математическом действии — будь то решение стандартного уравнения или построение сложной теории — главное содержание одно и то же: путь от *вопроса* (быть может, нечетко поставленного и требующего уточнений) до *верного ответа*.
- Все математические утверждения делятся на **осмысленные** и **бессмысленные**.
- Осмысленные математические утверждения делятся на **истинные** и **ложные**. С мировоззренческой точки зрения главное, чему может научить математика — это убежденность в том, что точно сформулированные утверждения (в данном контексте — в виде ответа на вопрос) имеют вот это объективное, не зависящее от воли учителя, начальника, милиционера и т.п. качество: быть истинными или ложными.

Иногда истинность утверждения установить легко, иногда трудно; иногда настолько трудно, что необходим профессионал; иногда — безумно трудно, и требуются сотни лет работы профессионалов.

(Знающие математическую логику скажут, что иногда установить истинность в некотором смысле невозможно, этот вопрос мы не будет здесь обсуждать.) Но никакая трудность не лишает осмысленного математического утверждения главного связанного с ним вопроса: истинно или ложно?

• Математические утверждения делятся на **частные, непосредственно проверяемые** (например, 3 x 17 = 51), и **общие, специализируемые** (например, *квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов ее катетов*). Специализация — научное слово для рассмотрения частных случаев. И, несколько упрощая, можно утверждать, что в любом возрасте необходимый и достаточный признак (формального) понимания математического утверждения — способность к (хотя бы мысленной) проверке непосредственно проверяемого утверждения и построению выбранного частного случая специализируемого утверждения.

О доказательствах и опровержениях. Для любой математической деятельности важно не только понятие доказательства (установления истинности), но и понятие **опровержения** (установления ложности). В то время как доказательство общего утверждения дело непростое, его опровержение может состоять в демонстрации одного ложного частного случая (так называемого **контрпримера**).

Замечательно, что школа почти не уделяет внимания опровержениям. Заметим при этом, что умение привести опровергающий пример к общему утверждению, как и вообще — найти ошибку в своем рассуждении, достаточно важно в жизни. Математика (в том числе и школьная) является прекрасным полем для выработки этих умений, для формирования рефлексии и самоконтроля. Профессиональный математик, пытаясь доказать интересную ему теорему, как правило, параллельно все время рассматривает ее частные случаи, среди которых ищет опровержения, с одной стороны, и элементы доказательств, которые пригодятся ему в общем случае, с другой. Всю эту деятельность можно представить себе как исследование некоторого «микромира», обнаружение в нем неизвестных областей и закономерностей.

Школьная же математика ориентирована прежде всего на *правильные* доказательства *правильных* теорем. В каком-то отношении это игра в одни ворота, теряющая интерес: выиграешь, если будешь хорошо себя вести, повторяя или имитируя учителя.

Об экспериментальной математике

Микромиры. Подход, естественно возникающий в компьютерной математике, противоположен. Там исходным пунктом является именно микромир. Он предъявляется учащемуся, который его исследует и строит внутреннюю модель этого микромира. Проверка частных утверждений оказывается делом быстрым, особенно эффективно обстоит дело с опровержением.

«Лого». Важнейшим событием, определившим во многом место компьютера в обучении математике, стало появление «Лого». В среде

«Лого» микромир — это плоскость экрана (обычно свернутая в тор, иногда — часть огромной, имитирующей бесконечную, плоскости, которую можно видеть или частично, или «с высоты птичьего полета»). В микромире «Лого» живут черепашки, которые умеют делать шаг задаваемой длины и поворачиваться на задаваемый угол. Черепашкой можно управлять, просто командуя ей, что нужно делать. Но намного интереснее заранее задать ей программу действий. Двигаясь по экрану (выполняя команду или программу), черепашка может оставлять след на нем. Выбрав себе задачу — что-то нарисовать на экране (например, квадрат), учащийся оказывается перед необозримым выбором, но зато он может попробовать предложить черепашке выполнить программу, по поводу которой есть надежда, что она действительно задает квадрат. С первой попытки может не получиться квадрат, но что-то получится и с этим можно работать дальше, меняя, достраивая программу. «Лого» является замечательной интегрированной средой, в которой учащийся в равной степени знакомится как с классической арифметикой и началами геометрии, так и современной дискретной математикой — алгоритмами, дискретными приближениями непрерывных величин.

Динамическая геометрия. Вариантов экспериментальной (динамической) геометрии во всем мире не так много — около трех. Мы в своих рассмотрениях будем опираться на Geometer's Sketchpad («Живую геометрию» — ЖГ) в российской адаптации.

ЖГ представляет собой компьютерную среду, которую можно считать микромиром, исключительно удачно сочетающим евклидову идеализацию плоскости и динамические возможности современной компьютерной математики. *Конструктивно* она основана на двух основных операциях — построениях циркулем и линейкой; комбинации некоторых из них (например построения перпендикуляров) соединены в легко выполняемые команды. Это позволяет пользователю быстро овладеть навыками классических построений, результаты которых по качеству, простоте и скорости значительно превосходят результаты традиционных построений на бумаге. *Измерительный аппарат* ЖГ позволяет параллельно с построениями проводить количественные наблюдения.

По сравнению с идеализированной евклидовой плоскостью микромиру ЖГ присущи два (не очень существенных с точки зрения математического эксперимента) ограничения. Во-первых, все происходит на ограниченной части плоскости: в пределах экрана. По этому поводу следует отметить, что подавляющая часть результатов евклидовой геометрии также моделируется на ограниченной части плоскости; исключение составляет *пятый постулат* о параллельных, который, впрочем, занимает особое положение в математике: более чем двухтысячелетнее продумывание этого постулата привело к *неевклидовой* геометрии. Во-вторых, все измерения в ЖГ приближенны, причем точность приближений невелика и (в отличие от систем компьютерной алгебры) принципиально не повышаема. Это говорит о том, что изучение в среде ЖГ таких вопросов, как *несоизмеримые* *отрезки* или *длина окружности,* должно быть дополнено рассмотрениями вне среды ЖГ.

Более существенны *динамические* возможности ЖГ; связанные с ними динамические и анимационные чертежи и сценарии развивают стиль геометрического мышления, воспитанного рассмотрением *подвижных* фигур, мышления намного более плодотворного, чем традиционный стиль созерцательно-статических рассмотрений.

Здесь также следует выделить два аспекта. Во-первых, *конфигурационное мышление*, о котором писал Дж. Пойа, из области неуверенных полетов в мир неосязаемого перемещается в простую работу с легкодоступными и самостоятельно изготавливаемыми манипулятивами. Например, перемещая по экрану вершины треугольника, мы можем из одного треугольника получить *все* (с точностью до подобия). Различные стандартные теоремы, например, теорема о пересечении медиан *произвольного* треугольника, превращаются (для всех! включая слабейших по математике учащихся) в *очевидные*, хотя и *нетривиальные*, экспериментально проверяемые факты. Во-вторых, возникают новые классы объектов: *следы движущихся точек*. Даже простейшие из них, такие как следы середины отрезка, соединяющего точки, равномерно движущиеся по двум окружностям, очень красивы, причудливы и математически интересны. В традиционной математике такие кривые назывались *механическими* и изучались, начиная с античности, а особенно интенсивно — в XIX веке, например, П.Л. Чебышевым в России и В. Понселе во Франции. При этом «механическая» деятельность, например, Понселе, противопоставлялась (им самим и Ф. Клейном в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии») чистой геометрической. ЖГ, таким образом, представляет собой среду, в которой области чистой и прикладной математики, ранее мыслившиеся как далеко отстоящие друг от друга, естественно объединяются.

Наблюдения, эксперименты и исследования. Границы между этими видами деятельности определены нечетко; исходная задача преподавателя — вовлечь учащегося в простейший из них, в *наблюдения*. Темы для наблюдений могут быть как угодно стандартны. Например, можно предложить семиклассникам, изменяя форму треугольника на экране, проследить за тем, какая сторона и какой угол являются *наибольшими*; следует добиваться точных формулировок (для чего исключительно полезен *цвет*; формулировка *у моего треугольника* ***сейчас*** *самая длинная сторона — синяя* гораздо лучше и понятнее, чем *сторона AB больше стороны AC*). Нет никаких сомнений в том, что большинство семиклассников, вовлеченных в этот процесс[2], самостоятельно обнаружат, что *наибольший угол лежит напротив наибольшей стороны*. Квалифицированный учитель сможет подтолкнуть семиклассников к формированию дальнейших

[2] А современный семиклассник (знающий много способов, как, например, делать вид, что пишешь что-то под диктовку, а самому заниматься чем-нибудь гораздо более интересным) ни за что не станет уклоняться от такого рода компьютерной работы.

предположений, к обсуждению вопроса о том, равносильна ли найденная формулировка более традиционной *против большей стороны лежит больший угол* и т.д. Особенно важно, чтобы **все** учащиеся (и прежде всего слабые, ленивые и не интересующиеся математикой) почувствовали, что их прямые наблюдения, которые оказываются прямым следствием их *врожденных* способностей *видеть* и *говорить* (а не следствием усердия при выполнении стандартных заданий «по образцу»), могут быть **интересны** и им самим, и окружающим. Артистическим натурам (например, девочкам, не верящим в свои математические способности и собирающимся стать дизайнерами) должна быть предоставлена полная свобода самовыражения в изготовлении *красивых* чертежей (и, разумеется, осмысленных надписей к ним! здесь очень уместна коллективная деятельность). Разумный учитель не будет скупиться на похвалы лучшим (а иногда даже *всем*) чертежам.

Простейшие *эксперименты* отличаются от наблюдений тем, что *сознательно* ставятся; как правило, они связаны с какими-то уже сформулированными *вопросами*; эти вопросы не всегда имеют точный математический или какой бы то ни было еще смысл, но должны быть *понятны* и *интересны* экспериментатору.

Успешные наблюдения очень естественно переходят в эксперименты. Например, описанные выше наблюдения могут привести к вопросу *а что происходит с треугольником, когда его синяя сторона перестает быть самой длинной*? Это — типичный пример упомянутого выше конфигурационного мышления, т. е. экспериментов над переменным треугольником. Поставивший такой вопрос семиклассник будет двигать вершины по экрану уже не произвольно, а вполне определенным образом, обращая особое внимание на моменты некоторого *качественного* изменения треугольника. Нетрудно понять, что в процессе этого эксперимента школьник на эмпирическом уровне обнаружит большую часть теорем школьной программы, относящихся к теме *равнобедренные треугольники*.

Экспериментальные исследования основаны на последовательностях экспериментов — с их продумыванием, формулировками предположений, приводящих к дальнейшим экспериментам, и т.п. По существу, школьнику, вовлеченному в экспериментально-математические исследования, доступны все элементы взрослой научно-исследовательской деятельности.

В качестве примера темы для экспериментальных исследованием в восьмом классе приведем такую: *изучить множество четырехугольников с заданным набором длин*. У этой темы есть полностью освоенный в седьмом классе *аналог* или же *вырожденный* случай: *треугольники с заданным набором длин.*

Параллель с писанием текста. Добиваясь от ребенка академического рисунка, мы убиваем артистизм детского рисунка, добиваясь каллиграфии, чистописания, тривиальной грамотности, мы убиваем коммуникацию и самовыражение. Компьютер позволяет писать чисто, красиво и без ошибок — тем самым открывая простор для творчества и решения интересных коммуникативных задач.

Заключение

О чем не было сказано. В небольшой статье невозможно даже кратко рассмотреть многие важные вопросы, связанные с возможностью использования компьютеров в преподавании математики. Поэтому ограничимся перечислением некоторых тезисов, связанных с этими вопросами.

- В геометрии скорость рассмотрения частных случаев выросла в тысячи раз, а иногда появилась и сама возможность такого рассмотрения.
- С появлением сред, подобных ЖГ, в рамках традиционного преподавания геометрии имеет смысл резко увеличить долю задач *на построение* среди других видов задач.
- Желательна разработка *новых педагогических технологий*, построенных на систематической работе учащихся (иногда коллективной, сетевой, дистантной и международной) с предположениями и их подтверждениями и опровержениями; необходима систематизация и критический анализ уже проведенных работ этого направления.
- Желательно ввести в состав Живой Математики живую алгебру, живую вероятность, статистику, дискретную математику и т.д.

О внутрипредметных целях математики в присутствии компьютера. Резюмируем основные возможности модернизации курсов математики, связанных с полноценным использованием компьютеров.

- **Компьютер как средство проверки математических утверждений.** Компьютер позволяет перейти от педагогики заучиваемых утверждений к педагогике проверяемых фактов, от педагогики механически воспроизводимых навыков к педагогике получения *результатов*, за которые учащийся — возможно, после *компьютерной проверки* — полностью отвечает.
- **Компьютер как объект.** Понимание того, *как устроен компьютер* и *как он работает*, безусловно, относится к математике. Помимо традиционных для курсов информатики тем (двоичные системы счисления и т.п.), в основные курсы школьной математики должны быть включены элементы теории алгоритмов и анализа алгоритмов. Один из вопиющих пробелов современных программ — отсутствие в них древнейшего и глубочайшего *алгоритма Евклида*.
- **Компьютер и обработка больших массивов информации.** В противоположность геометрии, в которой глубокая математика развивается на базе минимальных конструкций, теория вероятностей и математическая статистика становятся осмысленными лишь при работе с большими массивами информации. В современном мире такая работа без компьютеров немыслима.
- **Компьютер как средство хранения и источник математической информации.** Неряшливые, безграмотные и тайком используемые шпаргалки и бумажные справочники должны постепенно уходить в прошлое. Компьютер может и должен использоваться для построения индивидуально настроенных, удобных, достоверных и многоуровневых средств получения любой известной

человечеству математической информации. За исключением небольшого количества специальных мероприятий (например, проверки знания таблицы умножения *наизусть*) использование этих средств должно быть постепенно легализовано для всех форм проверки знаний и навыков.

· **Компьютер как средство написания математических текстов.** Компьютеры дают возможность создавать грамотные, красивые, иллюстрируемые и легко корректируемые тексты; авторы этих текстов испытывают при их написание удовольствие и законную гордость; как правило, они готовы приложить значительные усилия для доведения этих текстов «до совершенства». Иногда речь может идти о чистых компиляциях, но и в таких случаях можно добиваться от их авторов разумных иллюстраций, комментариев и т.п. Эти тексты должны со временем заменить неряшливые *контрольные*, которые после получения отметки выбрасываются и забываются.

· **Компьютер как средство коммуникации.** В мире существует огромное количество любительских математических сайтов: любителей фракталов, узлов, кривых, числа π и т.д. Разумное участие в работе таких сайтов, как и (в некоторых случаях) создание собственных, может направляться и стимулироваться *грамотным* преподавателем математики — при условии, разумеется, что эти работы — не самоцель, а средство приобщения к проблемам, действительно **интересующим учащегося.**